Рене Том

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МОРФОГЕНЕЗА

Институт Компьютерных Исследований

R&C Dynamics

Рене Том

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МОРФОГЕНЕЗА пр0

Перевод с французского А. И. Пигалева

Под редакцией В. В. Шуликовской

Институт Компьютерных Исследований

R&C Dynamics

Москва ♦ Ижевск

2006

УДК 101, 573.2

Том Р.
Математические модели морфогенеза. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. — 136 стр.

Автором предлагаемого курса лекций по математическим моделям морфогенеза является известный французский математик и философ, крупнейший специалист в области алгебраической и дифференциальной топологии, основоположник математической теории катастроф, Рене Том, получивший в 1956 году филдсовскую премию. В книге воспроизводится содержание «курса Энрико Ферми», который был прочитан Р. Томом в Высшей Нормальной школе в г. Пизе еще в 1971 году. За прошедший период книга совершенно не потеряла своей актуальности и является значимым вкладом в теоретическую биологию и в философию науки в целом. С помощью строгих математических выкладок автор убедительно демонстрирует, что биологические представления вполне укладываются в разработанную им топологическую теорию. Здесь же нашли свое отражение философские аспекты его подхода к проблеме морфогенеза, а также основные положения созданной им теории катастрофы.

Предназначена для широкого круга специалистов в области биологии, физики, математики и философии.

ISBN 5-93972-532-5

http://rcd.ru
http://ics.org.ru

Оглавление

Примечания редактора издания на французском языке

пр0 1971, 3. Этот очерк, содержащий пять глав и список литературы, был опубликован в г. Пизе в 1971 г. Национальной Академией Линчеи, Высшей Нормальной школой г. Пизы и пизанским издательством научно-технической литературы (Editrice Tecnico Scientifica). В нем воспроизводится содержание «курса Энрико Ферми», который был прочитан Р. Томом в апреле 1971 г. в Высшей Нормальной школе в г. Пизе. В оригинальной версии он начинался с предисловия (см. следующую страницу).

Название очерка — «Математические модели морфогенеза» — было затем использовано еще раз. Оно стало названием сборника статей, изданного в 1974 г. в Париже издательством UGE в серии 10/18, и в настоящем издании оно обозначается как *MMM*1. Так же было названо «переработанное и расширенное» издание сборника, опубликованное в 1980 г. в Париже Христианом Буржуа (Christian Borgois); в настоящем издании оно обозначается как *MMM*2.

Все главы оригинального очерка от первой до пятой воспроизведены в *MMM*1 с некоторыми изменениями, на которые указывается в примечаниях.

Некоторые главы и части глав включены в главы 3, 5 и 6 с другими изменениями, которые также отмечены в примечаниях.

Прим. перев. Чтобы избежать отождествления номеров примечаний с верхними индексами математических символов и одновременно подчеркнуть принадлежность примечаний редактору, в переводе, аналогично тому, как это сделано в оригинале, номерам примечаний предшествуют буквы «пр» («примечание редактора»).

Предисловие Джильберта Бернарди

Этот том открывает серию публикаций под эгидой Национальной Академии Линчеи и Высшей Школы*), задуманную как собрание лекций, прочитанных в Ospiti Lincei в окрестностях La Normale. Мы надеемся, что, благодаря этому сборнику, в распоряжении итальянских и иностранных студентов окажутся документы высокого научного уровня, представляющие собой оригинальный синтез особенно актуальных тем.

Хорошим знаком для будущего этого сборника является то, что он открывается прекрасными лекциями, прочитанными в память Ферми в нашей школе в 1971 году Рене Томом, профессором Института Высших Научных Исследований в Борэ-сюр-Иветт, о математических моделях морфогенеза. Преподаватели и слушатели Школы выражают живейшую благодарность блестящему автору, который сумел так хорошо изложить столь глубокие мысли, имеющие столь широкое применение.

Я надеюсь, что этот и следующие тома станут выражением живейшей признательности по отношению к Нормальной Академии Линчеи, пригласившей столь прославленных ученых внести свой вклад в поддержку культурных традиций нашей Школы.

Джильберто Бернарди
Директор Высшей Нормальной
Школы

---

*) Здесь: педагогический факультет при Пизанском университете

Глава 1

Программа морфологической теории: описание[пр0]

1.1. Определение морфологии

Мы исходим из следующего принципа: всякая наука — это исследование феноменологии. Тем самым подразумевается, что феномены в качестве объектов рассматриваемой науки показывают себя как события определенной формы, происходящие в некотором пространстве, которое мы назовем *субстратным пространством* исследуемой морфологии. В самых общих случаях (физика, биология) пространство-субстрат представляет собой не что иное, как обычное пространство-время. Однако иногда приходится заменять его пространством, полученным из обычного макроскопического пространства либо с помощью различных технических приспособлений (микроскоп, телескоп), либо с привлечением пространства качественных параметров (акустика как наука о звуках). Некоторые дисциплины из области гуманитарных наук, как, например, социология, еще все задаются вопросом, каковы факты, относящиеся к их компетенции, и поэтому они «a fortiori» («Тем более» (лат.) — Прим. перев.) пока еще не достигли уровня строго морфологического описания.

Во всем последующем изложении мы предполагаем, что субстратное пространство представляет собой открытое множество в некотором евклидовом пространстве, размерность которого, в принципе, конечна.

Наша первая задача заключается в том, чтобы охарактеризовать феномен в качестве пространственной формы. С этой целью введем следующую идеализацию.

Определение 1. *Регулярная точка морфологии.*

Пусть u есть точка субстратного пространства U. Точка u будет называться регулярной точкой, если в каждой точке u', достаточно близкой к u, среда, заключенная в пространство U, качественно выглядит так же, как в u: иначе говоря, шар достаточно малого радиуса с центром в u не содержит никаких феноменологически примечательных событий. В этом шаре ничего не происходит.

Из этого определения следует, что множество регулярных точек образует *открытое множество* в U. Это обосновывает

Определение 2. Любая точка замкнутого множества K в U, являющегося дополнением множества регулярных точек, будет называться *катастрофической точкой* этой морфологии. Если $v \in K$ является точкой катастрофы, во всем шаре с центром в v что-то происходит.

Замкнутое множество K будет называется *множеством катастрофы* соответствующей морфологии.

Замечание. Очевидно, что различие между регулярными и катастрофическими точками зависит от точности используемых средств исследования: точка, представляющаяся регулярной при наблюдении невооруженным глазом, могла бы оказаться катастрофической, если рассмотреть ее окрестность в микроскоп. Иными словами, само понятие феноменологии предполагает, что средства наблюдения зафиксированы раз и навсегда.

Впрочем, ясно, что множество катастрофы K образует только часть эмпирической морфологии. На самом деле она содержит непрерывные вариации качественных параметров (например, изменение цвета), которые могут и не проявляться во множестве K. В сущности, в некоторых ситуациях может даже возникнуть сомнение: а есть ли у радуги отчетливая кромка?

Следовательно, различие между регулярными и катастрофическими точками выступает как идеализация, сводящая всякую морфологию к остову ее качественных разрывов. И все-таки это различие образует одну из великих «категорий» нашего восприятия мира. Его обнаруживают в психологии (в теории восприятия) в различии «образ-фон», в семантике в различии «форма-содержание», и именно оно, вероятно, лежит в основе различия «открытое множество-замкнутое множество» в общей топологии.

Можно сказать, что одна из первых задач любой морфологической дисциплины заключается в исследовании, метрическом или топологическом, этих множеств катастрофы. С этой точки зрения важнейшей задачей является выяснение того, будет ли множество катастрофы K нигде не плотным. В самом деле в противном случае было бы основание говорить, что морфология является *хаотической* во внутренности замкнутого множества K. Это трудная ситуация для наблюдателя; в весьма общем виде с помощью операции усреднения («прищуривая глаза») он будет стараться забыть слишком мелкие детали, чтобы сохранить только усредненную видимость, которая снова введет регулярность почти всюду. Но бывают ситуации — как в случае турбулентности в гидродинамике или при наблюдении цитоплазмы с использованием электронного микроскопа, — которые весьма настойчиво указывают на всюду плотные множества катастрофы.

Проведем следующее различие.

Определение 3. *Обычные катастрофические точки.*

Точка x, принадлежащая множеству катастрофы K, называется обычной катастрофической точкой, если существует такая фундаментальная система окрестностей в виде шаров B_r, с центром в точке x, что все пары $(B_r, B_r \cap K)$ будут гомеоморфными.

На практике обычная катастрофическая точка x допускает в K окрестность, гомеоморфную конусу: так будет, если, например, K является подполиэдром некоторой триангуляции пространства-субстрата.

Любая катастрофическая точка, не являющаяся обычной, будет называться *особенной*. В окрестности особенной точки множество K изменяет свой топологический тип при приближении на сколь угодно малое расстояние к этой точке. В большинстве случаев обычные катастрофические точки образуют открытое множество, всюду плотное в K.

Сделав эти общие определения, можно уточнить, как описывается эмпирическая морфология и как в это описание включается фундаментальное понятие *структурной устойчивости.*

1.2. Структурная устойчивость

С точки зрения эпистемологии можно различать два типа морфологических дисциплин. Некоторые из них являются *экспериментальными*, поскольку человек может создать морфологию для исследования (случай физико-химии) или, по крайней мере, более или менее брутально вторгнуться в ее развитие (биология). Другие дисциплины, наоборот, основаны на *чистом наблюдении*: экспериментирование там невозможно либо по причине пространственной удаленности объектов (астрономия), либо по причине отдаленности во времени (науки о прошлом: геология, палеонтология, этнография, история...), либо, наконец, по причинам этического свойства (некоторые психологические и социальные феномены).

Понятие структурно-устойчивой морфологии, которое мы хотим использовать, в принципе может быть определено только в рамках некоторой экспериментальной дисциплины. Тем не менее можно допустить, что повторное наблюдение некоторых феноменов позволяет выдвинуть весьма правдоподобное предположение об их устойчивости, предположение, вероятность которого в некоторых случаях почти не уступает вероятности предположений, основанных на эксперименте. Следовательно, в ряде случаев можно было бы распространить нашу модель на дисциплины, основанные на чистом наблюдении, правда, не скрывая, что для этого надо принять часть дополнительных гипотез.

1.3. Схема эксперимента

Во всяком эксперименте «a priori» ставится цель привести некоторую систему в определенное состояние (a). В принципе система — это некоторая часть Вселенной, эволюцию которой во времени можно наблюдать так, как если бы она не зависела от остального мира. В большинстве случаев это требует некоторой пространственной изоляции системы: ученый помещает систему $L(S)$, которую предполагается изучать, в камеру B. Состояние (a) системы будет определено протоколом подготовки, т. е. текстом, написанным на обычном языке и со всей возможной точностью описывающем субстанции или объекты, которые должны быть помещены в камеру B, по возможности в надлежащем порядке, для того чтобы в момент времени $t = 0$, принятый за начальный, система (S) оказалась в состоянии (a).

Тогда эксперимент состоит, в сущности, в наблюдении эволюции системы (S) в моменты времени $t > 0$, которые следуют за подготовкой. Предполагается, что экспериментатор обладает зондами или другими устройствами для регистрации данных, которые позволяют ему «видеть» то, что происходит в окрестности каждой точки B. В ходе изучения морфологии, представленной в камере, исследователь должен в первую очередь позаботиться об определении множества катастрофы K, замкнутого множества в произведении $B \times T$ камеры B на ось времени T.

Однако протокол подготовки можно описать и осуществить только лишь в некотором приближении. Следовательно, результат эксперимента, проведенного над системой (S) в состоянии (a), представляет интерес лишь при том условии, что в результате приведения системы (S) в состояние (a'), достаточно близкое к (a), мы получим приблизительно ту же морфологию $K' \subset B \times T$, что и в первом эксперименте. В более точной форме: в этом случае будет существовать такой ε-гомеоморфизм $B \times T$ на себя, что $K' = h^{-1}(K)$. (Напомним, что h является ε-гомеоморфизмом, если $|d(x, h(x))| < \varepsilon$.) Если это так, то говорят, что морфология, возникшая из состояния (a), *структурно устойчива* или что она задана *морфогенетическим полем.*

Выражая это более точно, предположим, что первый эксперимент, поставленный в камере B в момент времени $t = 0$, задал морфологию, содержащую множество катастрофы K. Предположим, что другой ученый повторяет тот же эксперимент в другое время и в другом месте с камерой B', которая получается из B с помощью преобразования Галилея G. Структурная устойчивость будет существовать тогда, когда второй эксперимент даст в $B' \times T'$ множество катастрофы вида $K' = hG(k)$, где h, как и ранее, — это ε-гомеоморфизм $B' \times T'$ на себя.

Замечание. a) В предшествующем определении, в котором говорится о начальных условиях (a'), достаточно близких к (a), не уточняется, какая топология может быть определена на множестве состояний подготовленной системы (S). В большинстве случаев эта топология определяется количественными параметрами, входящими в подготовку состояния. Между тем, когда в подготовку включаются качественные свойства, — например, если в камеру помещают живые существа, — эволюция системы может обладать специфической чувствительностью по отношению к некоторым возмущениям, даже если количественно они очень слабы. Например, присутствие токсинов или патогенных микроорганизмов может вызвать смерть колонии. Следовательно, об устойчивости можно говорить лишь при условии исключения «a priori» этих специфических возмущений, которые предполагаются известными и каталогизированными.

b) Повторение эксперимента в другое время и в другом месте основывается на постулате, согласно которому протокол подготовки описывает процесс, не зависящий от частной пространственно-временной локализации. Это показывает, что текст на обычном языке может быть истолкован, инвариантно относительно пространственно-временного (или галилеева) перемещения. Таким образом, принцип относительности отныне присутствует в языке.

c) Поскольку существует (в принципе) только наука, основанная на требовании воспроизводимости, любой научный факт в той мере, в какой он описывается морфологически, задается морфогенетическим полем. Это предоставляет нам некую интерпретацию старой проблемы философии науки — проблемы «индукции». Мы некоторым неявным образом допускаем определенную регулярность в эволюции феноменов, так что если мы много раз наблюдали определенную эволюцию после данной начальной ситуации, мы из этого заключаем, что эта эволюция структурно устойчива.

Термин «морфогенетическое поле» был введен эмбриологами в начале века с целью описать в эмбриологии очень устойчивый (очень «регулярный» в биологических терминах) характер образования некоторых тканей или органов. За недостатком строгого определения этому термину была придана виталистская коннотация (которой, впрочем, явно избегали некоторые авторы вроде Дриша). Эта коннотация впоследствии немало способствовала дискредитации этого термина у биологов. Вот почему некоторая формализация этого термина будет небесполезной.

1.4. Некоторые определения

Морфогенетическое поле в субстратном пространстве U размерности n абстрактно определяется заданием открытого евклидова множества V той же размерности n и замкнутого подпространства $J \subset V$, *универсального катастрофического* множества. Они внутренне присущи полю F независимо ни от какой реализации. Локальная реализация F в U определяется открытым множеством $U_1 \subset U$, *носителем поля*, и отображением f носителя U_1 в V. Тогда катастрофическое множество в U_1 есть не что иное, как $K_1 = f^{-1}(J)$, прообраз J при f. Как правило, f — это диффеоморфизм, но иногда отображение f может иметь разрывные производные в некоторых точках K_1.

Очевидно, имеется понятие *подполя* морфогенетического поля; носитель подполя F' поля F есть подобласть U_1', носитель U_1 поля F. Универсальное пространство V' в F' есть подобласть пространства V в F, а универсальное катастрофическое множество, связанное с F', есть пересечение $J' = J \cap V'$.

Носитель любого морфогенетического поля содержится в некотором максимальном морфогенетическом поле, и если оно содержит всю рассматриваемую морфологию, то эта морфология глобально структурно устойчива.

Мы пока не ввели постулат о том, что у модельных пространств V есть координата времени τ. Можно ввести это предположение и, кроме того, постулировать, что отображение $f\colon B \times T \to V$ совместимо с расслоениями, определяемыми функциями t, τ: образ при f гиперплоскости $t = \text{const}$ есть гиперплоскость $\tau = \text{const}$ с монотонной функцией $\tau(t)$. Если это так, то говорится, что рассматриваемое морфогенетическое поле есть *креод*. Термин «креод» (от греч. «$\chi\rho\acute{\eta}$» — «необходимо» и «$o\delta o\zeta$» — «путь») был введен английским биологом К. Г. Уоддингтоном (*Introduction to Modern Genetics*, Allen & Unwin, London, 1940), но, конечно, в значении более качественном и менее формальном, нежели оно представлено здесь.

Можно усовершенствовать это описание, вводя в носитель U и V не только функции времени, но и поле мировых линий, трансверсальных к гиперповерхностям одновременности. Такое поле, если речь идет о материальной среде, описывало бы движение среды, заполняющей субстрат. Тогда надо потребовать, чтобы отображение $f\colon U \to V$ переводило мировую линию в мировую линию.

Как и в предыдущих рассуждениях, имеется понятие *подкреода* некоторого креода и *максимального креода.* Точно так же вводится понятие *асимптотического креода:* для такого креода модельное пространство V простирается до $\tau \to +\infty$. Тогда существует такой гомеоморфизм g_τ гиперплоскости $\tau = \mathrm{const}$ на себя, что a) g_τ стремится к тождественному при τ, стремящемуся к бесконечности; b) если J_a обозначает замкнутое пересечение множества J гиперплоскостью $\tau = a$, то существует такое замкнутое множество J_∞ , что $J_a = g_a^{-1}(J_\infty)$. Иначе говоря, морфология стремится к форме предельно устойчивой и инвариантной во времени.

1.5. Морфологии конечного типа

На практике, даже если подготовка начального состояния была выполнена с большой тщательностью, можно надеяться на достижение изоморфизма между двумя морфологиями K и K', соответствующими двум экспериментам, только для конечного промежутка времени. В самом деле, по истечении достаточно большого промежутка времени влияние начального детерминизма по сравнению с локальными возмущениями ослабевает, и в итоге наблюдаемые морфологии начинают отличаться друг от друга. Это означает, что, вообще говоря, наблюдаемая морфология не может быть покрыта единственным креодом. Однако часто случается, что наблюдаемая морфология тем не менее локально остается структурно-устойчивой: с каждой точкой $p \in K$ можно соотнести локальный креод, носитель которого содержит p. Предположим теперь, что рассматриваются все экспериментальные морфологии соответствующей дисциплины (что можно сделать, надлежащим образом изменяя начальные условия). Если существует конечное число таких элементарных морфогенетических полей F_j, что любая катастрофическая точка полученной морфологии может быть локально погружена в носитель одного из полей F_j, то говорится, что рассматриваемая морфология принадлежит *конечному типу.*

Выразим это точнее: можно потребовать, чтобы для любой точки p в K существовало такое расстояние, что любой шар $b_r(p)$ с центром p

и радиусом $r < a$ был бы носителем одного и того же морфогенетического поля F; это требует, чтобы p была обычной катастрофической точкой. Если это условие выполнено для всех точек p в K, то K есть стратифицированное множество — полиэдр, — а все точки, допускающие одно и то же морфогенетическое поле F, образуют страт этого множества.

Если требовать только того, чтобы шары $b_r(p)$ были бы носителями конечного числа морфогенетических полей, то K может иметь структуру типа канторова множества, все точки которого являются особенными: каждая Любая точка допускает фундаментальную систему окрестностей в K, все из которых гомеоморфны конечному числу типичных моделей.

1.6. Корпус

Если оказывается, что эмпирическая морфология является морфологией конечного типа, то первоочередной задачей является внесение всех элементарных полей (или креодов) в конечный каталог (или алфавитный список). Затем следует как можно сильнее изменять начальные условия, чтобы породить все морфологии, доступные в рамках рассматриваемой дисциплины. Затем составляется перечень их множеств катастроф K, каждое из которых разлагается на элементарные поля F_i. Таким образом получается то, что в термодинамике называется *ансамблем,* а в лингвистике — *корпусом* рассматриваемой дисциплины.

Как правило, корпус бесконечен, но из практических соображений экспериментатор удовлетворяется корпусом конечным, хотя и достаточно обширным для того, чтобы добавление в него новой экспериментальной морфологии не модифицировало бы заметно статистические свойства предшествующего корпуса. (Это, конечно, относится к области субъективных оценок и влечет за собой такой риск ошибки, с которым исследователь готов смириться.)

Замечание. Корпус можно создать и для морфологии не конечного типа, но тогда возникает проблема записи, «алгебраизации» этой морфологии.

1.7. Иерархические уровни: обусловленные креоды

Исследование корпуса нередко показывает, что определенные скопления креодов встречаются чаще других. Иногда можно даже уточнить класс ограничений, накладываемых на начальные условия, которые, будучи реализованы, делают устойчивыми определенные скопления креодов. В этом случае говорят об *обусловленных* креодах.

Вообще говоря, главная задача морфологической дисциплины состоит в предпочтении исследования обусловленных креодов, которые в ней встречаются, исследованию элементарных креодов, комбинаторика которых часто более банальна. Впрочем, можно встретить много уровней организации обусловленных креодов, организованных иерархически, где обусловленный креод уровня i образуется пространственным скоплением креодов уровня $(i-1)$.

Приведем несколько примеров морфологических дисциплин, где применяются эти понятия.

Пространственное строение обусловленного креода как скопления креодов более низкого уровня определяет его *структуру*, описываемую как замкнутое множество катастроф в субстратном пространстве.

Примеры.

a) *Биология.* На макроскопическом уровне ткани биология определяет морфологию конечного типа (существует только конечное число клеточных специализаций, относительные положения которых в пространстве могут быть локально каталогизированы). Напротив, на уровне цитоплазмы не очевидно, что цитоплазменные органеллы образуют морфологию конечного типа.

Как бы то ни было, живое существо может рассматриваться как обусловленный креод: чтобы изготовить особь вида E, необходимо вначале располагать особями того же вида (ограничение начальных условий). Получается иерархия уровней:

Молекула, надмолекулярная организация, цитоплазма, клетка, ткань, орган, организм, общество.

b) *Лингвистика.* Элементарные креоды суть буквы письменной речи (это асимптотические креоды), фонемы устной речи. Главные уровни артикуляции таковы:

фонемы, слоги, слова, фразы (речь).

В самом деле, передача слова или фразы может быть стабилизирована при определенных условиях окружения.

1.8. Программа морфологической теории

Такая программа предполагает следующие этапы.

1°) Определить замкнутое множество катастроф; проверить, относится ли морфология к конечному типу. Если да, составить каталог элементарных полей.

2°) Посредством изменения начальных данных составить экспериментальный корпус теории.

3°. Распознать внутри корпуса встречающиеся там креоды, определить их структуру в терминах элементарных креодов (или креодов более низкого уровня иерархии).

Уточнить, если это возможно, ограничения, которые должны быть наложены на начальные условия, для того чтобы создать или стабилизировать обусловленные креоды.

Этим завершается стадия описания; некоторые науки, как, например, биология, практически не вышли за пределы этой стадии. Другие, как, например, гуманитарные науки, еще не приблизились к этой стадии, за исключением очень локальных и неточных подходов. Что касается физико-химических наук, то, если они и не придерживались такой схемы, это происходило из-за исторических особенностей их становления. В этих науках доминировало исследование количественных инвариантов (массы, энергии), связанных между собой числовыми законами, в ущерб чисто качественному исследованию их морфологии. Фактически физико-химическая морфология плохо изучена и плохо понята, о чем свидетельствует зачаточное состояние теорий ударных волн (в динамике жидкостей) или фазовых переходов вообще (критические феномены, теория жидкого состояния, рост кристаллов и т. д.).

Примечания редактора

[пр0]1971, 3.1. Переиздано в *MMM1*, гл. 1, с. 7–18. Этот второй вариант значительно отличается от первого. Последний воспроизводится *in extenso*[*)] ниже. Эта глава была исключена из *MMM2*.

[*)]Полностью (лат.). — *Прим. перев.*

Вариант 1974 г. Общие соображения о морфологиях: описание

1. Наука и феноменология

Реальность предстает перед нами в виде феноменов, форм, наличие которых мы обнаруживаем благодаря отсутствию у них качественной непрерывности. Ведь «объекты» достаточно часто претерпевают только медленные трансформации, и лишь их относительная устойчивость позволяет нам ориентироваться в гуще их множественности и разнообразия.

С помощью какого процесса сознание приходит к постулату неизменности одного и того же сущего по ту сторону бесконечного многообразия его аспектов? Эта задача распознавания форм поднимает весьма трудные вопросы, относящиеся к физиологии и философии. Отвлекаясь на время от этих сложных проблем, мы, однако, выдвинем первый принцип: «*Всякая наука — это исследование феноменологии*».

Итак, что же такое «феномен»? С этимологической точки зрения феномен есть то, что делает себя видимым, что показывает себя, что является, а всякая видимость обнаруживает себя в *некотором пространстве*. В большинстве случаев это пространство — не что иное, как евклидово пространство-время, в котором развивается обычная морфология повседневной действительности. На это можно заметить, что такая морфология сама по себе не является объектом науки, но почему? Потому, что мы располагаем ментальными механизмами, связанными со «здравым смыслом», с логикой, с обычным языком, и они чаще всего позволяют нам эффективно действовать в нашем окружении. Огородник, который, для того чтобы собрать морковь, высевает семена моркови, не претендует тем не менее на положение ученого, хотя он неявным образом и занимается биологией. Если биология, «гуманитарные» науки до сего дня так мало математизированы, то лишь потому, что наше непосредственное интуитивное понимание биологических, психологических или социальных фактов достаточно для нужд повседневной жизни.

Наука зарождается в тот день, когда ошибки, поражения, неприятные сюрпризы заставляют нас присмотреться к действительности поближе. Механика была, вероятно, первой из наук, поскольку в ней изучались затруднительные положения с неопределенным результатом (например, необходимость попасть в жертву метательным снарядом), что вызывало необходимость более точного представления действительности, которое задавалось бы с помощью числа.

2. Субстрат морфологии: катастрофы

2.1. Субстрат морфологии

Пространство, в котором проявляют себя явления некоторой морфологии, будет называться *субстратным пространством* этой морфологии. Это пространство практически всегда будет открытым подмножеством евклидова пространства, например, областью обычного пространства-времени.

В определенном смысле это сводится к утверждению, что всякая феноменология должна рассматриваться как доступный зрению «спектакль». В нем, несомненно, налицо первенство зрения перед другими, более примитивными чувствами, вроде обоняния. Гераклит говорит: «Если бы мироздание было только дымом, мы познавали бы ноздрями». Но сомнительно, что единственное пространство, определенное концентрацией пахнущих субстанций, могло бы стать носителем морфологии, достаточно устойчивой для того, чтобы иметь хоть какой-то смысл. У многих насекомых восприятие различной силы одного и того же стимула (например, градиента концентрации пахнущей субстанции между двумя усиками) позволяет живому существу локализовать источник запаха и, следовательно, спроецировать его в обычное пространство. Значит, обоняние играет роль лишь проводника, направляющего градиента в обычном пространстве, которое остается основным.

Само собой разумеется, что для многочисленных научных дисциплин субстратным пространством исследуемой морфологии больше не служит обычное пространство-время. Например, в акустике субстратным пространством является функциональное пространство (бесконечной размерности), которое описывает колебания воздуха. Точно так же в атомной или субатомной физике следует заменять обычное пространство производными пространствами, вроде пространства моментов или пространства Гильберта. Но даже в этом случае речь всегда идет о конструкции, полученной из макроскопической морфологии повседневной действительности. Когда физик пытается нам сказать, что «наши чувства нас обманывают» и что этот стул, стоящий здесь, в действительности представляет собой систему взаимодействующих в вакууме атомов, он вводит нас в заблуждение. Его видение, несомненно, законно, если поместить себя в некоторые в высшей степени софистические экспериментальные условия. Тем не менее стул — это объект пространства $\mathbb{R}^3$, достаточно прочный для того, чтобы на него сесть, впрочем, именно для этого он и предназначен. Любое субстратное пространство морфологии сконструировано на основе обычного макроскопического наблюдения, и топология или метрика обычного пространства практически всегда включаются в определение более сложного, субстратного пространства, которое пришлось ввести.

2.2. Регулярные и катастрофические точки

Как было сказано, всякая морфология характеризуется некоторой качественной прерывностью субстрата. Предположим, что в основе изучаемой морфологии лежит область U субстратного пространства, в общем случае пространства-времени. Точка x в U будет называться *регулярной*, если существует такая окрестность $V(x)$ точки x в U, что в любой точке y из $V(x)$ процесс качественно выглядит так же, как в x.

В силу самого этого определения регулярные точки образуют открытое множество в U. *Замкнутое множество*, дополнение $K = U - W$, будет называться *замкнутым множеством катастроф*.

Любая катастрофическая точка $x \in K$ обладает следующим свойством: сколь угодно близко к точке x существуют точки $y \in U$, в которых морфология выглядит иначе, чем в x: *в любом шаре с центром x что-то происходит.*

Очевидно, что только задать замкнутое множество катастроф недостаточно для описания любой эмпирической морфологии, и на самом деле непрерывное изменение качественных свойств субстрата в этом определении упущено. С другой стороны, можно задаться вопросом о том, соответствует ли качественное различие «непрерывное-прерывное» критерию реальности: есть ли у радуги отчетливая кромка? Очевидно, различие между регулярной и катастрофической точками зависит от точности используемых средств наблюдения. Здесь речь идет об идеализации, границы которой очевидны.

Но нет почти никакого сомнения в том, что различие «непрерывное-прерывное» лежит в основе нашего восприятия мира. Если хорошо подумать, то станет понятно, что именно оно обусловливает различие «открытое множество-замкнутое множество» в общей топологии. Это различие хорошо известно теоретикам гештальт-психологии, которые ввели его в оборот вместе с классическим различием «образ-фон», равно как и семантикам, которые говорят о форме и содержании. Оно менее известно в физико-химии, потому что в этой дисциплине налицо было желание затушевать качественные различия в пользу количественных. Тем не менее и там это различие присутствует в теории *ударных волн* и *фазовых переходов*, т. е. как раз в тех типах феноменов, для которых количественные модели классической физики обнаруживают свое бессилие.

3. Структурная устойчивость

С точки зрения эпистемологии можно различать два типа морфологических дисциплин. Некоторые дисциплины являются *экспериментальными:* человек может создать морфологию для изучения (физикохимия) или, по крайней мере, более или менее брутально вторгнуться в ее развитие (случай биологии). Другие дисциплины, наоборот, основываются на *чистом наблюдении*; здесь экспериментирование невозможно либо по причине пространственной удаленности объектов (астрономия), либо по причине отдаленности во времени (науки о прошлом: геология, палеонтология, этнография, история), либо, наконец, по причинам этического свойства (психологические и социальные феномены).

Понятие структурной устойчивости, которое мы собираемся определить, в принципе может быть применено только по отношению к экспериментальной морфологии. Тем не менее можно допустить, что повторное наблюдение в некоторых случаях обладает такой убедительной силой, которая не уступает экспериментальному исследованию. Поэтому можно распространить нашу модель на дисциплины, не основывающиеся на эксперименте, впрочем, не скрывая, что для этого необходимо применять некоторые дополнительные гипотезы.

Экспериментатор создает морфологию, которую он намеревается исследовать, в соответствии со следующей схемой: имеется «камера» B, которая заполняется согласно *протоколу подготовки*, настолько явному и полному, насколько это возможно. Итак, экспериментатор в начальный момент времени t_0 подготавливает естественную систему S, морфологию которой он затем наблюдает. Следовательно, эта морфология будет описываться заданием множества катастроф K в произведении $B \times T$ — камеры B на ось времени T.

Но, в науке принимаются в расчет только воспроизводимые эксперименты. Следовательно, некоторый проведенный эксперимент будет иметь значение лишь тогда, когда другой экспериментатор, проводящий этот же эксперимент в другие моменты времени и в других местах, получит примерно ту же морфологию, что и в первом эксперименте. Именно этот факт подразумевается, когда говорят, что состояние, подготовленное в начальный момент времени в камере B, *структурно устойчиво*. Внесем некоторые уточнения, предположив, что камера B' второго эксперимента получается из камеры B с помощью элемента группы преобразований Галилея g. Тогда подготовленное состояние структурно-устойчиво, если множество катастрофы K', наблюдаемое в $B' \times T'$, имеет вид $K' = hg(K)$, где h — это ε-гомеоморфизм $B' \times T'$ на себя.

В самом деле, ясно, что нельзя надеяться на получение в B' точно такой же морфологии, как и в B. Как бы хорошо ни была изолирована система в своей камере, взаимодействия с окружающей ее вселенной нельзя полностью исключить. С другой стороны, процедуру, подготовки всегда можно и описать, и осуществить лишь в определенном приближении. Следовательно, можно надеяться на получение того же самого результата только ценой определенного «искривления», выраженного ε-гомеоморфизмом h.

(Примеры гомеоморфизмов искривления можно найти в книге: Arcy Thompson. On Growth and Form, Abridged Edition, Cambridge University Press, ch. 9.)

4. Морфогенетические поля и креоды

На практике, даже если подготовка начального состояния была выполнена с большой тщательностью, можно надеяться на достижение изоморфизма морфологий (K) и (K') в камерах B и B' только в течение определенного промежутка времени T. В самом деле, по истечении достаточно большого промежутка времени влияние начального детерминизма по сравнению с локальными возмущениями ослабевает, и в итоге наблюдаемые морфологии начинают отличаться друг от друга. Если тем не менее совпадение морфологий может наблюдаться на открытом множестве U произведения $B \times T$, то говорят, что U является носителем *морфогенетического поля* (F). В абстрактных терминах, морфогенетическое поле (F) определяется заданием абстрактного пространства V той же размерности, что и U, и заданием в V стандартного *замкнутого катастрофического множества* J. Когда реализуются —

даже локально — начальные условия, свойственные внешнему выражению поля (F) морфология, наблюдаемая на рассматриваемом открытом множестве U, определяется отображением $G\colon U \to V$ таким, чтоб наблюдаемое множество катастрофы K было прообразом J при G: $K = G^{-1}(J)$. В общем случае отображение G является гомеоморфизмом, обладающим прекрасными свойствами регулярности, но нельзя исключать возможности того, что у G обнаруживаются разрывы производных на множестве K.

Очевидно, имеется понятие *подполя* морфогенетического поля F; носитель U' подполя F' из F содержится в носителе U поля F (то же справедливо и относительно стандартных множеств катастрофы: $J' \subset J$). Любое морфогенетическое поле содержится в максимальном морфогенетическом поле. Если вся эмпирическая морфология покрывается единственным морфогенетическим полем, то она глобально структурно-устойчива.

Мы пока не ввели постулат о том, что у модельных пространств V есть координата времени τ. Можно выдвинуть эту гипотезу и, кроме того, постулировать, что отображение $G\colon B \times T \to V$ совместимо с расслоением, определяемым с помощью T и τ в исходном и конечном пространствах. Если это так, то говорят, что морфогенетическое поле есть *креод*. Термин «креод» (от греч. «$\chi\rho\acute{\eta}$» — «необходимо» и «$o\delta o\zeta$» — «путь» = «необходимый путь») был введен английским биологом К. Г. Уоддингтоном (Introduction to Modern Genetics, Allen & Unwin, London, 1940), но, конечно, в значении более качественном и менее формальном, нежели оно представлено здесь.

Как и в предыдущих рассуждениях, имеются понятия *подкреода* некоторого креода и *максимального креода*. Точно так же вводится понятие *асимптотического креода*. Для такого креода модельное пространство V простирается до $t = +\infty$, сечение множества катастрофы J гиперплоскостью $t = t_0$ есть замкнутое множество $J^{\text{пр}1}$. Тогда существует гомеоморфизм g_t, стремящийся к тождественному при $t = \infty$, и такое замкнутое множество J_∞ , что $J_t = g_t(J_\infty)$. Иначе говоря, морфология стремится к форме предельно устойчивой и инвариантной во времени (пример: кость). Вполне возможно, что морфология оказывается структурно-устойчивой локально, не будучи таковой глобально. В этом случае она с необходимостью покрывается несколькими различными креодами, сочленение которых определяется начальными условиями. Впрочем, именно так обстоят дела в большинстве научных морфологических дисциплин. Изменяя начальные условия, можно получить целый «ансамбль» (в смысле термодинамики) морфологий, однако все они локально обнаруживают общие морфологические черты. Это оправдывает введение так называемых морфологий конечного типа.

5. Морфологии конечного типа

Определение. Говорят, что множество E морфологий относится к *конечному* типу, если, в морфологию (M) этого множества и замкнутое множество катастрофы K, мы видим, что существует такое конечное покрытие V_j множества K, что каждое U_j является носителем морфогенетического поля F_j, где каждое F_j принадлежит к конечному множеству так называемых элементарных морфогенетических полей, данных раз и навсегда.

Морфология считается относящейся к локально конечному типу, если стандартные поля F_j имеют в своих модельных пространствах выделенную точку (начало) 0 и если любая точка x в U допускает такую окрестность U_i, что множество катастрофы $X \cap U_i$ определяется отображением G: $U \to V$, которое переводит точку x в 0, а множество U_i — в окрестности 0 в V_i.

Когда морфология относится к конечному типу, любая катастрофическая точка имеет локальную модель для одной из своих окрестностей. То же самое справедливо и для гомотетических окрестностей, обладающих одинаковой локальной моделью. Из этого следует, что любая точка x из K допускает в K систему гомеоморфных окрестностей, т. е. практически топологический конус. Это означает, что в данном случае множество катастроф имеет стратифицированную структуру (ее страты образованы точками, имеющими одно и то же локальное морфогенетическое поле F_i) или, проще, полиэдрическую структуру.

Зато на основе гипотезы о морфологиях локально конечного типа можно получить множества катастрофы типа канторова множества (вполне разрывные), в которых каждая точка обладает ростком гомеоморфных окрестностей в конечном числе модельных типов.

6. Корпус

Если оказывается, что рассматриваемая эмпирическая морфология относится к конечному типу, первоочередной задачей является внесение всех элементарных полей (или креодов) F_i в конечный каталог. Затем следует изменять начальные условия таким образом, чтобы составить списки всех морфологий, возможных для множества катастроф K. Тем самым создается то, что называется *корпусом* рассматриваемой морфологической дисциплины (по аналогии с терминологией лингвистов).

Вообще говоря, корпус бесконечен, но из практических соображений экспериментатор удовлетворяется корпусом конечным, хотя и достаточно обширным, для того чтобы добавление новой экспериментальной морфологии не изменяло заметно статистические свойства предшествующего корпуса. (Это, конечно, относится к области субъективных оценок и влечет за собой такой риск ошибки, с которым исследователь готов смириться).

7. Обусловленные креоды

Изучение корпуса нередко показывает, что определенные скопления элементарных полей встречаются более часто и обнаруживают относительную устойчивость. Иногда можно уточнить совокупность таких ограничений Q, накладываемых на начальные условия, что если начальные данные удовлетворяют (Q), то скопление (A) обнаруживает устойчивость и ведет себя как обыкновенное морфогенетическое поле. Тогда говорится, что это — обусловленное морфогенетическое поле.

Во множестве случаев, очень важных для практики, эта конструкция может подвергаться итерации: можно так уточнить последовательность вложенных условий

$$Q_1 < Q_2 < \ldots Q_{i-1} < Q_i < \ldots Q_k,$$

что если условия (Q_j) в начальный момент выполнены, определенные скопления (A_j) оказываются устойчивыми. Часто носитель поля (A_j) является сжимаемым и может быть получена как конечное объединение полей (A_{j-1}): описание поля (A_j) как объединение (A_{j-1}) образует то, что называется структурой обусловленного поля (A_j).

8. Структура уровня организации

Теоретически в морфологии конечного типа должна была бы существовать возможность выразить структуру любого обусловленного поля (A_j) уровня j в терминах элементарных полей (A_0), порождающих морфологию. На самом деле это осуществляется очень редко. В большинстве случаев структурная автономия уровня (j) выражается следующим образом: существует такая абстрактная морфология, определенная полями $\{B\}$ над пространством U, что носитель любого поля A_j гомоморфно[пр2] отображается на поле B абстрактной морфологии U. В этом отображении прообразы элементарных (для U) полей, образующих B, суть поля (A_{j-1}) уровня $(j-1)$, которые образуют (A_j). Эти элементарные поля абстрактной морфологии (U) часто обозначаются словом «функции». В самом деле, они участвуют в «регулировании» полей (A_j), и происходит это в соответствии с довольно незамысловатыми схемами.

Пример. а) *Лингвистическая морфология.*

В речевой цепи имеется последовательность иерархических уровней организации.

Фонема — Слог — Слово — Предложение — Фраза.

Две пары уровней — «фонемы-слоги» и «слова-предложения» могут быть описаны посредством абстрактной морфологии (U): структура слога, состоящего из фонем, описывается фонологией, а структура предложения, состоящего из слов, описывается синтаксисом. В первом случае морфология (U) состоит из символов $CCVCC$, описывая структуру слова с помощью гласных (V) и согласных (C). Во втором случае морфология (U) является последним рубежом древа генеративной грамматики, описывающей синтаксическую структуру предложения. Напротив, уровни «слоги-слово» и «предложения-фраза» почти нельзя определить структурно (по крайней мере, в первом случае не во всех языках).

Пример. b) *Морфология живых существ.*

Имеется следующая иерархия.

Молекулы — Надмолекулярные объединения — Органеллы — Клетка — Органы — Особь — Вид — Экологическое сообщество.

Здесь единственной парой уровней, поддающихся некоторой формализации, является следующая пара: «органы-особь». Например, в биологии животных структура организма, состоящего из органов, стала объектом знаменитого умозрительного построения об общем плане организации живых. Оно стало темой известной дискуссии в Парижской Академии наук в 1830 г. между Кювье и Жоффруа Сент-Илером.

Похоже, что современная наука взяла сторону Кювье и отклонила идеи Жоффруа Сент-Илера из разряда умозрительных построений. Однако нет сомнений в том, что последнее слово в обсуждении этой проблемы еще не сказано... Уровни «органеллы-клетка» и «клетки-органы» не поддаются почти никакой формализации — в общем случае.

В большинстве морфологических дисциплин с иерархическими уровнями имеются в общем случае самые «обширные» поля, представляющие наибольший интерес (во всяком случае в биологии особь может рассматриваться в качестве такого же интересного объекта, как и вид). Здесь не следует заблуждаться: страшно трудной проблемой является именно формализация понятия иерархического уровня организации в морфологии. Ее можно было бы разрешить, только если бы удалось предъявить для абстрактных морфологий U относительно каноническую форму. В этом отношении теория катастроф открывает некоторые перспективы: в той мере, в какой каждое подполе A_{j-1} связывается с определенным механизмом «регулирования», механизмом гомеостаза глобального поля (A_j), оно превращается в носитель некоторой «функции». Таким образом объясняется лингвистическая омонимия между грамматической функцией (в лингвистике) и физиологической функцией (в биологии). Может быть, в действительности нельзя осуществить описание морфологии независимо от теоретической модели, «a priori» постулирующей определенные ограничения, которые накладываются на морфологии структуры (U). В этом смысле описание является — в некоторой степени — функцией «объяснения».

Некоторые физические процессы, вроде гидродинамической турбулентности при бесконечном числе Рейнольдса (нулевая вязкость), имеют свойство изоморфно повторяться внутри самих себя, когда они подвергаются гомотетическому преобразованию с произвольным коэффициентом гомотетии. Если эти процессы являются морфологическими, то они должны допускать несчетное множество уровней организации, которые, впрочем, изоморфны друг другу. Очевидно, такая ситуация с трудом поддается пониманию, но зато совершенно понятна счетная бесконечность «уровней организации, которые все изоморфны друг другу». Некоторые математические объекты, вроде кривой фон Коха (непрерывная кривая, не имеющая производной) или конструкция превосходного канторова множества, являются прекрасными реализациями этой счетной бесконечности.

9. Программа морфологической теории

Такая программа предполагает следующие этапы.

1° Сформировать корпус экспериментальных морфологий, уточнить их множество катастроф.

2° Исследовать, относится ли морфология к конечному типу, и, если это так, составить атлас элементарных морфогенетических полей.

3° Определить иерархические уровни организации, уточняя, если это возможно, ограничения, которые следует наложить на обусловленные поля A_j уровня j так же, как это происходит в абстрактных морфологиях (U), которые определяют «функции», участвующие в регулировании полей (j) и локализованные в полях уровня $(j-1)$.

Этим в принципе завершается стадия описания. Некоторые науки, как, например, биология, практически не вышли за пределы этой стадии либо глубоко привержены ей. Другие, как, например, «гуманитарные» науки, еще не приблизились к этой стадии, за исключением очень локальных и фрагментарных подходов. Но раз описание достигнуто, приходит время объяснения.

Примечания редактора

[пр1] Разумеется, следует читать J_0.
[пр2] Следует читать «гомеоморфно».

Глава 2

Объяснение морфологий[прО]

Если не сомневаться, что составление описи доступных наблюдению феноменов является первейшей задачей ученого в данной дисциплине, то затем перед ученым ставится задача осознания того, что же дальше делать со всеми этими данными. В этом отношении мои контакты с экспериментаторами или специалистами в самых разных областях науки показали мне, в какой степени очень многие ученые недостаточно хорошо понимают цель своей собственной деятельности. Конечно, принято говорить, что после того как феномены *описаны*, их следует *объяснить*. Но что здесь подразумевается?

В принципе объяснить — значит дать ответ на вопрос: «Почему?». Следовательно, всякое объяснение является причинным: ведь как сказал поэт: «Felix qui potuit rerum cognoscere causas» («Счастлив тот, кто смог познать причины вещей» Вергилий (лат.). — *Прим. перев.*) Но понятию причины предшествует трудная проблема детерминизма, которую и следует обсудить прежде всего.

2.1. Детерминизм

В историческом плане отношение науки к детерминизму часто менялось. XIX век принял детерминизм целиком и полностью, в абсолютной форме, предписанной классической механикой в знаменитом описании, которое было дано Лапласом. Затем физика вместе с квантовой механикой (1925–1930 гг.) в этом вопросе вернулась к индетерминистской концепции элементарных феноменов, концепции, от которой она с тех пор так и не отказалась. Несомненно, ни одна из этих двух концепций не может рассматриваться в качестве окончательной. Первая по своему абсолютному метафизическому и даже теологическому характеру почти сводится к научному «wishful thinking» («Принятие желаемого за действительное» (англ.). — *Прим. перев.*). Напротив, вторая грешит чрезмерным пораженчеством. В самом деле, статистические закономерности, выраженные в законах квантовой механики, могут быть лишь отражением лежащих в их основе структурных инвариантов (так же, как при игре в орлянку, строгая симметрия подбрасываемой монеты выражается в асимптотическом равенстве числа выпадений орла и решки). В сущности, спор о детерминизме, будучи освобожден от своих метафизических задних планов, в плоскости опыта сводится к следующему утверждению: существуют более или менее детерминированные феномены, а само это свойство «быть более или менее детерминированным» определяется локальным состоянием процесса. Любая модель, которая стремилась бы соответствовать реальности, с необходимостью включает в свой состав некоторую смесь детерминизма и индетерминизма. В самом деле, в каждом морфологическом процессе наблюдение обнаруживает области субстрата, в которых локальная эволюция корректно определена качественно (это — наши морфогенетические поля, наши креоды), и другие присоединенные зоны, в которых эта эволюция неустойчива и слабо детерминирована. Отказываться проводить это различие, сводя всю систему к глобальной количественной модели, имеющей статистическую природу, — значит пренебрегать весьма значительной частью данных и очень часто обрекать себя на бессилие. Конечно, сокровенной целью ученого является показ того, что вся эволюция детерминирована, так что ссылки на случайность или внутренне присущую феноменам индетерминированность противоречат научной этике. Только знание причинного детерминизма позволяет добиться абсолютного контроля над феноменами. Но этот детерминизм является идеалом, к достижению которого следует стремиться, а не постулатом «a priori». Ведь описание (как это было показано) и в определенной мере объяснение возможны в теории, которую можно было бы сформулировать только при условии принятия детерминизма. Таким образом, лингвист вполне может одновременно верить в человеческую свободную волю и в возможность формализовать синтаксис языка.

2.2. Морфологии зависимые, морфологии автономные

Говорят, что морфологическая дисциплина (D) автономна, если в протоколе подготовки состояния из (D) участвуют только те сущие, те объекты, которые описываются посредством (D). Таким образом, любая физико-химическая морфология, определенная независимым развитием материальной смеси, автономна, и так же обстоит дело с биологической морфологией. Зато для проявления лингвистической морфологии необходимо, требуется наличие человеческих существ. Значит, в качестве морфологической дисциплины лингвистика зависит от наличия этого другого морфологического события, которое представляет собой социальную человеческую группу. В большинстве случаев дисциплины, субстратным пространством которых является обычное пространство-время, автономны. Если пространство-субстрат не является пространством-временем, а некоторым производным пространством, то, вообще говоря, существует зависимость данной дисциплины от других, более «фундаментальных» дисциплин.

В этом отношении случай лингвистики очень интересен. После Фердинанда де Соссюра лингвисты не прекращают попыток отстоять *автономию* лингвистики, тогда как предшествующее определение точно проявляет ее характер, существенно зависящий от антропологии. Известно, как следует понимать этот термин «автономия»: соотнося с каждым словом (в смысле, который, очевидно, не является точным) его грамматическую категорию, можно соотнести с каждой фразой корпуса обусловленный креод абстрактной морфологии (грамматики или синтаксиса), которая поддается, по крайней мере частично, формальному описанию. Иначе говоря, морфология корпуса гомоморфно отображается (способом, соответствующим временно́му порядку) на абстрактную морфологию синтаксиса. Ядро этого гомоморфизма состоит в выборе специфических слов, соответствующих каждой из главных грамматических функций (подлежащее, сказуемое, дополнение и т. д.), из выбора «терминального» элемента, в терминологии генеративной грамматики. Этот выбор зависит именно от речи, как говорит Соссюр, а не от языка. Он отражает семантические элементы окружения, которые мотивируют или характеризуют вербальный поток говорящего. Иначе говоря, на иерархическом уровне фразы лингвистическая морфология не может рассматриваться как автономная. Но ценой перехода к факторизации, ценой гомоморфизма в абстрактную морфологию с малым числом порождающих элементов (в синтаксис) можно придать ей некоторую автономию. Этот пример проясняет процедуру, которая часто оказывается полезной в морфологическом анализе: определение некоторой абстрактной морфологии более простой, чем данная, с небольшим числом элементов, которая была бы гомоморфным образом эмпирической морфологии. Очень часто креодам этой частной вспомогательной фактор-морфологии дается имя «функции».

2.3. Этапы объяснения

Из предшествующих рассуждений вытекает, что объяснение морфологии, в сущности, предстает в виде двух подходов, фундаментально различных, если не противоположных в философском отношении, — *редукционистского* подхода и структурного подхода.

Когда имеют дело с зависимой морфологией, в рамках редукционистского подхода «a priori» провозглашается, что только изучение феноменов примитивной морфологии может предоставить объяснение. Если исследуемая морфология автономна, то единственным ходатайством редукционистского подхода является переход на низший иерархический уровень с целью реконструировать морфологию высшего уровня посредством комбинирования креодов на низшем уровне.

В своей высшей форме редукционистский подход является механистическим атомизмом: предполагается, что примитивная морфология составлена из пространственных частиц, законы взаимодействия которых известны. Интегрируя систему дифференциальных уравнений, определенную таким образом, мы получаем возможность предвидеть эволюцию системы исходя из каких угодно начальных условий. Очевидно, такая схема была бы совершенной. Но пришлось бы признать, что она совершенно неосуществима по двум главным причинам: из-за очень большого числа подлежащих учету частиц (10^{23} молекул в одном моле газа) и неопределенности, тяготеющей, в сущности, над взаимодействиями хоть сколько-нибудь сложных молекул... Неопределенность, нависающая над потенциалами взаимодействия молекул, играет некоторую роль и в том, что количественные модели оказываются неспособными учесть фазовые переходы. Единственная система, допускающая такой анализ, — это «идеальный газ» (впрочем, лишь с использованием методов статистической механики), и в этом случае морфологии не существует.

Наконец, мне неизвестны примеры редукционистского объяснения посредством обращения к некоторой примитивной морфологии, которая была бы сколько-нибудь формализованной (конечно, есть многочисленные вербальные объяснения в плане повседневного языка, но не теории). Например, именно в лингвистке можно было бы постараться объяснить переход «речь→язык» , прибегая к помощи семантики. Конечно, существуют некоторые попытки в этом направлении (структурная семантика), но большинство авторов отказываются связывать семантику с человеком или с внешним миром. (Моя собственная теория объяснения синтаксических структур в качеств образов катастроф в пространстве-времени является, возможно, единственным примером редукционистского, но тем не менее формального и качественного объяснения.)

Впрочем, в метафизическом плане против редукционистского подхода можно выдвинуть знаменитое возражение Аристотеля «Anagke sthenai» («Небходимо остановиться» (греч.). — *Прим. перев.*). Однажды следовало бы остановиться на уровне рассматриваемых сущих в качестве не сводимых ни к чему из сущностей «атомов». Если принять законность этого приближения (поскольку в онтологическом отношении ничто не позволяет удостоверить существование «абсолютных атомов»: неудачи современной теории частиц, называемых элементарными, прекрасно это подтверждают), то почему бы равным образом не признать некоторую ценность за объектами, данными феноменологически, за креодами (обусловленными и сколько-нибудь элементарными) исходной морфологии?

Это аргумент, на который опирается другой объяснительный подход, *структурный подход*. Структурный подход стремится действовать экономно: в качестве данной он признает только эмпирическую морфологию (на специфическом уровне организации), в принципе отказываясь рассматривать низшие уровни организации или внешние, «более фундаментальные» морфологии, от которых могла бы зависеть данная морфология. В принципе природа структурального объяснения является качественной, алгебраической. формализующей, хотя из этого не следует, что редукционистский подход непременно является количественным. Фактически в историческом отношении нужда в использовании количественной модели, системы дифференциальных уравнений, основанных на законах физики, во многом и вызвана привлекательностью редукционистского подхода. Бесчисленным специалистам, которые упрекают структурные методы в том, что они являются «описаниями», а не «объяснениями», следует ответить вопросом (ответ на который, вообще говоря, вызывает у них сильное затруднение): «Является ли закон тяготения Ньютона $F = kmm'/r^2$ описанием или объяснением?»

На наш взгляд, ответ ясен: «Формула Ньютона является объяснением, по своей природе структуральным, поскольку она делает возможным быстрое описание эмпирической морфологии (движение небесных тел, сила тяжести на земле)». Очевидно, в этом случае модель является количественной, что как раз и обеспечивает бесконечное число предсказаний и подтверждений. Но это удачный случай, и он не поддается обобщению достаточно легко. Это не редукционистское объяснение, поскольку формула Ньютона совершенно не зависит от тонкой структуры материи (протонов, электронов и т. д.), которая нам, впрочем, известна.

Теперь понятно, куда метит структурный подход: его целью является упрощение эмпирического описания посредством выявления его скрытых закономерностей и симметрий посредством общего образа действий, позволяющего *устранить произвольность* описания.

2.4. Структурное объяснение: его философия

В том, что нужно быть готовым к наличию некоторых закономерностей в эмпирической морфологии, нет ничего удивительного. В самом деле, есть основания полагать, что регулирующее действие креода его морфологии не будет строго ограничено носителем U креода. Позади области U (в конусе влияния, аналогичном световому конусу теории относительности) обнаруживается зона неустойчивости, в которой влияние креода U остается ощутимым. Часто некоторые креоды в этой зоне будут запретными, а для других она является как раз благоприятной. Например, в фонетике французского языка после фонемы «p» не допускается фонема «k», и единственными согласными, допустимыми перед гласной, являются плавные звуки «l», «r» (в крайнем случае, «s» и «t» в словах, заимствованных из греческого языка). Таким образом, локальный детерминизм выражается посредством «переходов», посредством запретных окрестностей и преимущественным формированием локальных скоплений креодов.

В этих скоплениях нетрудно увидеть «обусловленные креоды», хотя в общем случае эти последние требуют порядка на большом расстоянии, характерного для высшего иерархического уровня (см. рис. 1).

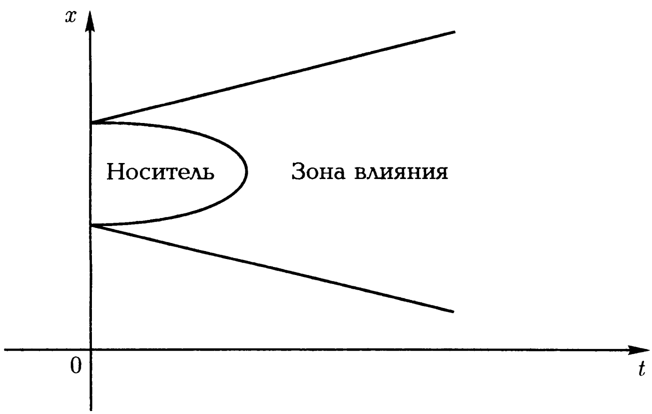


Рис. 1. Носитель и зона влияния креода

Но помимо этих связей, между соседними креодами можно постараться выявить еще более широкие закономерности. С этой целью базовый алгоритм должен предъявить математический объект, представляющий различные типичные подмножества (F). Связывая с каждым креодом морфологии корпуса некоторый специфический элемент, фигурирующий в (F), и сохраняя отношения близости, можно определить гомоморфизм из любой морфологии корпуса в одно из подмножеств, принадлежащих (F). Например, в лингвистике, в синтаксисе пытаются связывать с каждым словом такой порождающий элемент формальной системы (S), чтобы, если аксиомы (S) выбраны надлежащим образом, «слова» из (S) в свободном моноиде, образованном порождающими элементами из (S), были бы образами фраз, представленных в корпусе (грамматически корректных фраз). В других случаях (как в этнологии при формализации некоторых систем брачных отношений) стандартный математический объект должен был бы быть графом, на котором действует определенная группа симметрий. Тогда возникает проблема определения того, какой тип математического объекта следует выбрать для того, чтобы получить наиболее явно выраженные модели. До настоящего времени гуманитарные науки в их попытках структурного подхода действовали весьма эмпирически, и, в сущности, была нужда только в очень грубых объектах вроде группы Z_2 двоичного противопоставления, треугольника, возникающего при нейтрализации этого противопоставления (как в теории происхождения гласных Якобсона), квадрата (семиотического квадрата Греймаса) и формальных языков теоретической лингвистики.

В статье [SB][пр1] я обсудил различные гипотезы, позволяющие связать с естественным процессом некоторый математический объект, который бы служил моделью этого процесса. Модель теории катастроф приписывает закономерности феноменов гипотезе «обобщенности», «общей позиции». У нее есть преимущество, — по крайней мере в гипотезе градиентной динамики, — в непосредственном задании полуалгебраической модели множества катастрофы морфогенетического поля. Таким образом, математический объект, избираемый в качестве модели, задается теорией. Более того, определенная комбинаторика элементарных морфогенетических полей может проявиться так же лишь при условии учета особенностей большой коразмерности, и именно это позволяет определить обусловленные креоды достаточно большого объема. С этой точки зрения модель теории катастроф основана на философии, достаточно сильно отличающейся от философии, вдохновившей использование формальных языков в лингвистике. В лингвистике речь идет об аксиоматическом создании морфологии, т. е. о предъявлении класса автоматов, функционирование которых порождает данную морфологию. Следовательно, любая модель такого типа неявно соответствует гипотезе о глупости природы. Возможно, эта гипотеза не слишком далека от действительности, когда дело касается неживой природы. Ведь количественные физические законы классической физики выражают, несомненно, монотонное повторение небольшого числа случаев, качественно всегда одних и тех же и всегда подтверждающих устойчивость пространства-времени. В биологии ситуация выглядит заметно иначе, поскольку некоторые феномены вроде развития зародыша свидетельствуют о существовании достаточно широкомасштабной плоскости, содержащей большое число устойчивых изолированных феноменов. Между тем при изучении биологических феноменов, которые функционально изолированы, можно видеть повторное появление, — по крайней мере частичное, — некоторого автоматизма. Таковы автоматизмы синтаксиса в лингвистике или генетического кода на уровне синтеза протеинов.

Модель катастроф заимствует из редукционистского и количественного подхода идею, согласно которой локальные состояния системы могут быть параметризованы посредством точек дифференцируемого многообразия — как в классической динамике, — а ее эволюция в общем случае задается посредством векторного поля на этом многообразии. Но здесь обращает на себя внимание гипотеза: мы снова допускаем, что субстрат всякой морфологии — будь она даже по своей природе предельно абстрактной — заполнен внутренне недифференцированным флюидом, навроде эфира в максвелловской физике. Глобальный процесс описывается непрерывным полем с такими локальными динамиками (как в старой теории поля, имевших дело с полями осцилляторов в пространстве-времени). Эти локальные динамики находятся в состоянии асимптотического равновесия в каждой регулярной точке процесса, в которых они определяют «локальный режим». В этой модели всякая морфология возникает в результате столкновения локальных решений. Итак, эта модель позволяет связать структурную устойчивость морфологии со структурной устойчивостью динамической системы. Понятие динамической системы стало предметом новой математической теории, которая, несмотря на трудность ее разработки, добилась заметного успеха. Прежде чем перейти к описанию собственно модели катастроф, напомним основные идеи этой теории.

2.5. Динамические системы. Асимптотические состояния. Аттракторы

Определение 1. *Динамическая система.*

Динамическая система состоит из следующих величин, обозначаемых (M, X):

a) дифференцируемого многообразия M^n (фазовое пространство);
b) дифференцируемого действия группы $\mathbb{R}$ («времени») в M^n.

Если g_t: $M \to M$ — преобразование, связанное со временем t, то производная d/dt $(g_t(x))$ не зависит от t и зависит только от x[пр2]. Тем самым определяется векторное поле X над M.

Наоборот, интегрируя векторное поле X из M, получаем росток действия группы $\mathbb{R}$ в M. Если M — компакт, то интегрирование обеспечивает глобальное действие группы $\mathbb{R}$.

Множество точек $g_t(m)$, полученных преобразованием точки m, по определению является *орбитой* этой точки:

$$g(m_0) = f_t(m_0).$$

Определение 2. Пусть g есть орбита динамической системы (M, X). Точка m из M называется ω-предельной точкой орбиты g, если для всех $\varepsilon > 0$ и $t_0 > 0$ существует такой момент времени $T > t_0$, что точка $f_T(m_0)$ находится от точки m на расстоянии, меньшем чем ε. Множество ω-предельных точек орбиты g, обозначаемое как (g), есть замкнутое инвариантное множество орбиты[пр3].

Определение 3. Две орбиты g, g' называются *асимптотическими*, если они имеют одно и то же ω-предельное множество.

Две точки p, p' называются асимптотически эквивалентными, если их орбиты являются асимптотическими. Тем самым определяется отношение эквивалентности между точками множества M. Достаточно часто это отношение эквивалентности открыто «почти всюду»: каждому асимптотическому состоянию (замкнутому множеству пределов) соответствует для множества орбит, стремящихся к F, открытое множество в M, которое называется *бассейном* состояния F. Если точка p из M принадлежит бассейну, то можно говорить, что мы находимся в ситуации практического детерминизма, поскольку конечное состояние процесса (состояние F) не изменяется при небольшом возмущении начальных условий. В других случаях эти классы эквивалентности не открыты и беспорядочно перемешаны друг с другом; тогда налицо ситуация практического индетерминизма. Это означает, что смесь детерминизма и индетерминизма, упомянутая в § 2.1, оказывается с самого начала реализованной с помощью модели классической динамики, когда она интерпретируется асимптотически.

Определение 4. Аттрактором поля X в M называется подмножество A множества M, удовлетворяющее следующим условиям.

(i) Почти любая орбита в A является плотной в A.

(ii) Существует такая фундаментальная система окрестностей U_i подмножества A в M, что a) любая орбита произвольной точки $u \in U_i$ имеет ω-предельное множество, содержащееся в A; b) если a — это точка из U_i такая, что ее α-предельное множество (предел при $t = -\infty$) пересекает A, то a — это точка из A.

Примеры.

1) *Точечный аттрактор.*

В этом случае множество A сводится к единственной точке a. Если обозначить через $j^1(X)(a)$ матрицу линейных членов разложения X в ряд Тейлора в точке a, то при условии, что вещественные части всех собственных значений этой матрицы отрицательны, получается *обычный аттрактор.* Такой точечный аттрактор будет называться «обобщенным». В самом деле, поле вокруг a является локально структурно-устойчивым: для любого поля X', достаточно близкого к X, в топологии C^1 существуют окрестности V_i аттрактора a' в X' и окрестности U_i аттрактора a с гомеоморфизмом h: $U_i \to V_i$ таким, что $h(a) = a'$, и любая орбита в X переходит в орбиту в X'.

2) *Замкнутая траектория.*

Пусть (c) — одна из таких орбит, гомеоморфная окружности S^1. Пусть q — точка c, H — росток гиперповерхности, трансверсальной к (c) в q. Орбита, начинающаяся в точке m из H, впервые снова пересечет H в точке m'. Преобразование (называющееся преобразованием Пуанкаре–Флоке) h: $m \to m'$, является ростком диффероморфизма с неподвижной точкой q. Если собственные значения матрицы Якоби $j^1(h)(q)$ по модулю оказываются меньше единицы, то замкнутая траектория является обобщенным аттрактором. В самом деле, для любого поля X', достаточно близкого к X в топологии C^1, найдется замкнутая траектория (c') и такой гомеоморфизм g, переводящий окрестность траектории (c) в окрестность траектории (c'), что образ орбиты из X под действием g является орбитой в X'.

Эти два примера очень просты в том, что касается топологии аттракторов. Есть и другие примеры, значительно более сложные. Описание и классификация аттракторов, структурно-устойчивых локально — в несколько менее строгом смысле, который будет уточнен ниже, — это, несомненно, одна из главнейших задач сегодняшней качественной динамики. В этом отношении можно сделать следующие наблюдения.

Определение 5.

Функция Ляпунова. Пусть (M, X) — динамическая система. Функция Ляпунова, определенная на открытом множестве U из M, есть вещественная функция F: $U \to R$, возрастающая на каждой орбите из X (в особой точке, в которой $X = 0$, обычно накладывается условие $dF = 0$). Функция Ляпунова может быть глобальной ($U = M$) или локальной (U есть собственное открытое подмножество из M). В этом случае предполагается, что функция F собственная: $F^{-1}(K)$ есть компакт, если K является компактом[пр4].

Любой аттрактор A динамической системы (M, X) допускает локальную функцию Ляпунова (Смейл, Уэсли, Уилсон). Предполагается, что эта функция равна нулю в A и отрицательна вне A. При этих условиях поле X трансверсально многообразию уровня $F = \varepsilon$, $\varepsilon < 0$, и входит в это многообразие. Следовательно, любое поле X', достаточно близкое к X в топологии C^1, входит в то же самое многообразие. Значит, аттрактор A не может исчезнуть под воздействием возмущения, малого относительно C^1. Такое возмущение не может заставить его вырваться наружу, поскольку он остается заключенным в многообразии $F = \varepsilon$. Зато с ним в принципе может случиться «взрыв, направленный внутрь», заставляющий его вырождаться в один или много аттракторов, размерность которых в общем случае меньше размерности A. Но, покрывая всю окрестность C^1 для X, следует ожидать, что этот каскад внутренних взрывов прекратится и, следовательно, что почти на любом рассматриваемом поле рассматриваемой окрестности аттрактор или аттракторы больше не будут изменять свою топологию.

Определение 6. Аттрактор A поля X называется топологически устойчивым, если любое поле X', близкое к X относительно C^1, допускает аттрактор A', который получается из A посредством ε-гомеоморфизма h некоторой окрестности. (Но h не обязательно переводит орбиту из X в орбиту из X'.)

Таким образом, как было показано выше, обобщенный точечный аттрактор и обобщенная замкнутая траектория топологически устойчивы. Из этого следует то же самое и относительно гиперболических аттракторов, описанных Р. Уильямсом.

Эти определения служат основанием для

Спектральной гипотезы.

Пусть $D(M)$ — это пространство векторных полей над M, снабженное топологией C^r, $r \geqslant 1$. Существует такое всюду плотное открытое множество U в $D(M)$, что для любого поля X из U:

(i) X допускает конечное (или счетное) число аттракторов A_i, и объединение $B(A_i)$ их бассейнов всюду плотно в M.

(ii) Каждый из аттракторов A_i локально топологически устойчив.

Контрпример, которым мы обязаны Шелдону Ньюхаусу, показывает, что в (i) следует ограничиваться только конечным числом аттракторов. Если имеется бесконечно много аттракторов, некоторые из этих аттракторов имеют бассейны, объем которых стремится к нулю, и самое слабое возмущение способно привести к их исчезновению. В некотором смысле эти аттракторы с очень маленькими бассейнами не обладают «термодинамическим» существованием.

Очевидно, что недавняя история теории структурной устойчивости, обнаружившая постоянно возрастающую патологию, побуждает нас рассматривать сформированную выше гипотезу только крайне осторожно.

В этом отношении недавний результат М. Шуба и К. Зимана показывает, что некоторые поля в $D(M)$, которые удовлетворяют этому свойству (с конечным числом аттракторов, сводящихся к замкнутым траекториям и обладающих глобальной функцией Ляпунова на M), образуют C^0-плотное множество (и тогда их аттракторы структурно-устойчивы в топологии C^1). Как мне говорил К. Зиман, в топологии C^0 «хорошие» системы являются плотными, но неустойчивыми, а в топологии C^1 они являются устойчивыми, но неплотными.

Следовательно, существует лежащая в основании модели катастроф идея, согласно которой система может оказывать регулирующее воздействие на свои собственные возмущения. Следует ли рассматривать это как одно из первых проявлений скрытого «витализма»?

Определение 7. Если единственный аттрактор, представленный в X, — это само многообразие M, то говорят, что X является *эргодическим* в M.

2.6. Случай гамильтоновых систем

Гамильтонова система определяется симплектическим многообразием M^{2n}, т. е. многообразием четной размерности, снабженным замкнутой 2-формой максимального ранга (как $\alpha = \sum dp_i \wedge dq_i$) с действительной функцией H: $M^{2n} \to \mathbb{R}$, *гамильтонианом*. С гамильтонианом связывается его «симплектический градиент» X по формуле:

$$i(X) \cdot \alpha = dH(\text{формула Гамильтона – Якоби})^{\text{пр5}}.$$

Тогда поле X называется *гамильтоновым*. Известно, что оно допускает H в качестве первого интеграла и оставляет инвариантной фундаментальную форму (как и ее «-надцатую» внешнюю степень, меру *Лиувилля*). Из этого следует, что на гиперповерхности постоянной энергии $H = \mathrm{const}$ поле X не имеет аттракторов. В важности гамильтоновых динамик в механике и физике есть что-то мистически парадоксальное. В самом деле, гамильтонова динамика допускает обратимость по времени (замену t на $-t$). Однако сомнительно, что какая-либо феноменология могла бы возникнуть без некоторой необратимости времени. Чтобы произошло некоторое событие (какой-либо природы), необходимо, чтобы конечное состояние обладало бы некоторым термодинамическим преимуществом перед начальным состоянием, а это как раз исключает такую динамику, в которой стрела времени могла бы изменить свое направление на противоположное.

Вот почему согласование такой чисто гамильтоновой теории, как квантовая механика, с феноменологией требует постулата «ad hoc» («Для данного случая» (лат.). — *Прим. перев.*), *теории измерения*, постулата, который отводит экспериментатору роль, не определенную даже по отношению к динамике теории.

Тем не менее в гамильтоновых системах существуют некоторые инвариантные замкнутые множества, которые обладают структурной устойчивостью по отношению к гамильтоновым возмущениям и которые можно рассматривать как «неопределенные аттракторы». Именно такова, например, замкнутая «центральная» траектория (изученная Колмогоровым, Мозером и другими). В этом случае диффеоморфизм Пуанкаре–Флоке является симплектическим диффеоморфизмом. Из этого следует, что его собственные значения распределяются либо в виде четверок («квартетов» вида λ, $\bar{\lambda}$, λ^{-1}, $\bar{\lambda}^{-1}$), либо в виде двоек (дуэтов) ($(\mu, \bar{\mu})$, где $|\mu| = 1$), и от одной конфигурации к другой можно перейти только посредством столкновения пар корней на единичной окружности. В нашем случае диффеоморфизм Пуанкаре является «центральным», касательным к вращению. Из этого можно вывести существование множества ненулевой меры, состоящего из траекторий, закручивающихся спиралью вокруг данной замкнутой траектории, но не удаляющихся от нее. Все эти траектории явно определяют «то же» термодинамическое состояние, что и начальная замкнутая траектория, и глобальная система не является эргодической.

Пример. Гармонический осциллятор.

Если $M^{2n} = \mathbb{C}^n$, $H = \sum p_i^2 + q_i^2$, $z_i = q_i + ip_i$, то гиперповерхности $H = \mathrm{const}$ являются сферами размерности $2n - 1$. Все траектории являются окружностями, которые определяют в S^{2n-1} *расслоение Хопфа* на комплексном проективном пространстве $CP^{(n-1)}$. Очевидно, здесь речь идет о ситуации, совсем не обладающей обобщенностью. Тем не менее, как было показано в работах Арнольда, первый интеграл гамильтоновой системы обладает определенной структурной устойчивостью, имеющей статистическую форму. Именно это объясняет то, что такие инварианты, как кинетические моменты, имеют некоторый смысл, несмотря на тот факт, что порождающие их симметрии являются приблизительными... В последующем изложении мы будет обращаться к гамильтоновым динамикам лишь в исключительных случаях ввиду их несовместимости с необратимостью феноменов.

2.7. Модель

Пусть $D = B \times T$ — базовая область, где происходит рассматриваемый морфологический процесс. Будем считать, что в каждой точке u из D множество локальных состояний процесса может быть параметризовано точками компактного дифференцируемого многообразия M, одного и того же для любой точки из D: *многообразия внутренних состояний*. Таким образом, мы приходим к параметризации всего множества локальных точек процесса точками произведения $E = D \times M$, тривиально расслоенного над D со слоем расслоения M, p: $E \to D$.

Определение 8. *Метаболическим полем* над D называется векторное поле X, определенное над E, касательное к слоям соответствующего расслоения p. Метаболическое поле может быть определено таким образом: каждой точке $u \in D$ сопоставляется поле $X(u)$ на слое M. Следовательно, имеется отображение G из базы D на пространство $D(M)$ векторных полей над M. Поле $X(u)$ определяется системой дифференциальных уравнений $dm/dv = X(m; u)$.

В этой формуле считается, что изменения X как функции u происходят медленно с точки зрения модуля поля X. Параметр v должен рассматриваться как *«локальное время»*, в принципе отличное от наблюдаемого макроскопического времени, которое параметризует ось T. Итак, мы выразили тот факт — на практике достаточно общий, — что локальные эволюции являются намного более быстрыми, чем глобальная эволюция морфологии, удерживающая лишь крупномасштабные события.

Определение 9. *Локальное состояние процесса.*

Оно определяется сечением s расслоения p: $E \to D$, которое связывает с каждой точкой $u \in D$ представителя локального состояния в u в слое $M(u) = p^{-1}(u)$. Предполагается, что это сечение определено и дифференцируемо в D, за исключением некоторого множества $K \subset D$, множества катастрофы.

Такое представление является детерминистским (за исключением, может быть, K). Мы получим более реалистическое представление, — термодинамического характера, — заменяя сечение $s(u)$ его асимптотическим состоянием в динамике слоев. Тогда, принимая спектральную гипотезу, а также то, что поле $G(u)$ относится к обобщенному типу, мы увидим, что предельное множество $\omega(s(u))$ будет (с топологической точки зрения) структурно-устойчивым аттрактором, который мы обозначим как $\overline{s(u)}$. Далее, этот аттрактор равным образом определен для близких полей и, вследствие непрерывности, значение $\overline{s(u')}$ для регулярного u', достаточно близкого к u, есть аттрактор, полученный путем деформации $\overline{s(u)}$ в процессе перехода от поля $G(u)$ к полю $G(u')$. Таким образом, с каждым аттрактором «обобщенных» полей метаболического поля G можно связать его «область» в D, которая представляет собой множество таких точек u из D, что $\overline{s(u)}$ является этим аттрактором. Не следует смешивать *область* аттрактора, которая есть открытое множество базы D, с его *бассейном*, который есть открытое множество слоя M «внутренних состояний».

В точке k, принадлежащей множеству катастрофы K, сечение $\overline{s}(k)$ не определено в принципе. Однако при желании можно определить $\overline{s}(k)$ как пороговое множество, отделяющее друг от друга бассейны аттракторов, конкурирующих в k. Такое сечение имеет свойство полунепрерывности:

$$\lim s(k') \subset s(k), \text{ если } k' \text{ стремится к } k.$$

Исходя из значения метаболического поля G и начального значения s при $t = 0$ невозможно, вообще говоря, уточнить природу и положение множества катастрофы K. Однако в том случае, когда поле G является потенциальным полем, можно сформулировать некоторые более или менее обоснованные правила (условие Максвелла), которые позволяют определить множество K.

2.8. Бифуркация

Обозначим через S особое множество полей в $D(M)$, не удовлетворяющих спектральной гипотезе. В этом случае динамики градиента динамики Σ — это гиперповерхность с особенностями в $D(M)$: она обнаруживает стратифицированную структуру, так что в каждой точке страта конечной коразмерности имеется локальная модель трансверсального сечения, определяемого полуалгебраическим множеством. Если сечение s дано для $t < t_1$, может случиться так, что в точке u, соответствующей $t = t_1$, аттрактор $s(u)$ утратит структурную устойчивость. Тогда $G(u)$ есть поле из S. Следовательно, мы видим, что часть множества катастрофы определяется тем фактом, что когда $G(u)$ находится в S, тогда аттрактор $\overline{s(u)}$ становится неустойчивым. Этот феномен — разрушение аттрактора посредством изменения поля и его замена новыми аттракторами — в качественной механике известен под названием *бифуркации* (похоже, что терминология восходит к Якоби и соответствует немецкому *«Abzweigung»*)*).

Когда аттрактор $A = s(u)$ разрушается бифуркацией, появляется некоторое количество аттракторов — близких и удаленных, — для того чтобы захватить свою долю его бассейна, и эти аттракторы-наследники разделят между собой окрестность точки u при $t > t_1$. Конкуренция между этими наследниками порождает морфологию ударных волн в D. В подобном случае можно иногда допустить, что этот раздел областей определяется внутренними характеристиками поля $X \subset D(M)$. (Это будет случай условия Максвелла, описанный ниже.) Таким образом, со стратом бифуркации σ из Σ связан страт универсальной катастрофы J в $D(M)$. (Говоря образно, *бифуркация порождает катастрофу*.)

Если отображение G, которое определяет метаболическое поле, является трансверсальным на страте S бифуркации и на стратифицированном множестве конфликта J, которое с ним связано, то локальное множество катастрофы K определяется прообразом $G^{-1}(J)$. В качестве трансверсального сечения стратифицированного множества J оно допускает существование локальной модели (вообще говоря, полуаналитической). Итак, получается, что локальная морфология может быть задана локальным *морфогенетическом полем, креодом*.

2.9. Случай градиентов

На этот раз предположим, что локальная динамика $X(u)$ определяется потенциалом $X(u) = -\mathrm{grad}_m V(m; u)$, $m \in M$, $u \in D$. Поля градиентов обладают на самом деле простыми свойствами: нет никакой рекуррентности, и каждая траектория проходит от критической точки

*) Ответвление (нем.) — *прим. перев.*

из V до другой критической точки. Почти любая траектория в конце достигает минимум, который, вообще говоря, определяется невырожденной квадратичной формой. Разложение многообразия M на бассейны локально будет относительно простым: бассейны разделены гиперповерхностями с особенностями, которые могут содержать «точки перегиба» типа $y = x^{\alpha}$ (если это необходимо, то большей размерности).

Другое преимущество гипотезы градиентов заключается в возможности заменить исследование векторных полей — еще довольно сложное и плохо разработанное — исследованием потенциалов. Таким образом, мы возвращаемся к изучению возможных бифуркаций минимумов числовых функций — к проблеме, при нынешнем развитии технических средств разрешимой с помощью теории «универсальной развертки», которая является предметом следующей главы.

В каждой точке $u \in D$ соответствующий локальный режим определяется одним из аттракторов поля $X = \mathrm{grad}_m V(m; u)$, т.е. одним из минимумов[пр6] потенциала V. Но в общем случае V допускает множество минимумов, так что имеется некоторая недетерминированность выбора устойчивого режима, который побеждает в u. Простое правило для устранения этой недетерминированности есть

Условие Максвелла.

В любой точке $u \in D$ локальный режим определяется абсолютным минимумом функции $V(m; u)$.

Этот абсолютный минимум μ в общем случае есть невырожденная, следовательно, структурно-устойчивая квадратичная форма. Следовательно, существует открытое множество $U \subset D$, над которым μ побеждает. Расширение области U будет прекращено при наличии двух обстоятельств.

(i) Минимум μ, всюду определенный и устойчивый, перестает быть абсолютным минимумом, поскольку меньше него оказывается другой минимум μ'. В точке v из U эти два минимума имеют равные значения. Тогда говорится, что v принадлежит к *страту конфликта*;

(ii) либо минимум μ становится структурно-неустойчивым; тогда точка v принадлежит к *страту бифуркации.*

Эти страты суть прообразы соответствующих стратов в функциональном пространстве $L(M; \mathbb{R})$ действительно-значных функций C^{∞} на M. В этом пространстве страты конфликта имеют коразмерность один и содержат на своей границе страты бифуркации, имеющие, по меньшей мере, коразмерность два.

Условие Максвелла (названное так потому, что именно благодаря ему определяется горизонтальный участок кривой (изотермы) Ван-дер-Ваальса) по своему алгебраическому характеру слишком удобно и часто отвлекает от физической реальности. Так, можно было бы оценить глобальную устойчивость минимума с помощью других функций, например, с помощью глобального объема его бассейна или относительной высоты самого низкого порога у границы бассейна. Выбор такой функции вместо условия Максвелла некоторым образом сказывается — вообще говоря, минимально — на топологии множества конфликта.

Этому виду правил может быть брошен более серьезный упрек: они совершенно пренебрегают феноменами — часто хорошо наблюдаемыми — *запаздывания* или *гистерезиса*. В некоторых случаях можно получить совершенное запаздывание: минимум существует, пока его бассейн не разрушается бифуркацией целиком.

Пример. Катастрофа Римана–Гюгонио.

Многообразие M здесь имеет размерность один (ось $0x$), в пространстве D размерности два (координаты u, v) имеется потенциал:

$$V = x^4/4 + ux^2/2 + vx.$$

Множество критических точек определяется посредством

$$\partial V/\partial x = x^3 + ux + v.$$

Дискриминант этого уравнения третьей степени равен

$$4u^3 + 27v^2 = 0. \tag{2.1}$$

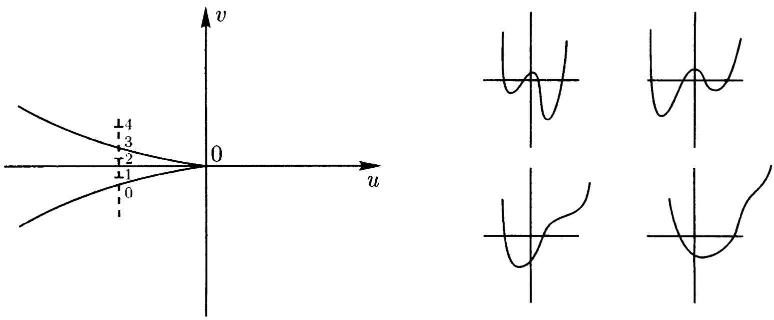


Рис. 2

Имеется три корня (два минимума), расположенных внутри полукубической параболы $4u^3 + 27v^2 < 0$. Условие Максвелла отводит для множества конфликта полуось $v = 0$, $u \leqslant 0$; начало координат есть страт бифуркации, минимум $V = x^4$ там неустойчив. Если принять условие «совершенного запаздывания», режим, господствующий в точке (u, v), зависит от истории этой точки. Например, если описывается параллель к v $(u = -k^2)$ в направлении возрастания $v^{\text{го}}$, то локальный режим, связанный с отрицательными v (единственный, если v достаточно велико), существует до линии верхней ветви полукубической параболы:

$u = 2t^3$,

$u = -3t^2 \quad t > 0 \quad$ (см. рис. 2).

Примечания редактора

пр0 1971, 3.2. Перепечатано в MMM1, гл. 2, с. 19–37. Этот второй вариант заметно отличается от первого, наиболее существенно до § 2.4. Он воспроизводится *in extenso* ниже. Эта глава была исключена из MMM2.

пр1 Первоначальные ссылки перемещены в конец статьи, как в варианте 1971 г., и их обозначение дополнено в соответствии с правилом, принятым в настоящем издании. Здесь *Structuralism and Biology*, 1972, 6.

пр2 Здесь Том допускает ошибку, следовало бы написать $g_t(x)$.

пр3 Вместо формулы $g(m_0) = f_t(m_0)$ следует, очевидно, читать $g(m) = \{g_t(m), t \in R\}$. Точно так же необходимо заменить $f_T(m_0)$ на $g_T(m)$.

пр4 Конец § 2.5 выглядит иначе в MMM1, см. ниже «Вариант».

пр5 Читатель заметит, что эта терминология не является стандартной.

пр6 Следует читать: $X = -\mathrm{grad}_m V(m; n)$.

Вариант (опубликован в MMM1) Научное объяснение и модель катастроф

Если ученые и, в частности, экспериментаторы без колебаний считают своей целью описание эмпирических данных, большая их часть, напротив, обладает только весьма частными — и пристрастными — понятиями относительно объяснения, которое должно быть дано накопленному таким образом экспериментальному материалу. Объяснить — это в принципе ответить на вопрос: «Почему?». Значит, можно было бы «a priori» думать, что понятие причины будет играть существенную роль в научном объяснении. Но то, насколько тонким должно быть различие между описанием и объяснением, показывает следующий — классический — пример.

1. Описание и объяснение

Является ли классический закон тяготения Ньютона $F = kmm'/r^2$ описанием или объяснением? A priori в нем можно было бы видеть только простое описание, поскольку, как об этом нехотя говорил сам Ньютон в своем знаменитом изречении «Hypotheses non fingo»*), он не предоставляет никакого объяснения, никакой модели происхождения силы притяжения между двумя телами. Между тем речь идет, несомненно, об одном из самых блестящих успехов науки всех времен. В самом деле, ньютоновский закон предоставляет если не объяснение, то, по меньшей мере, значительное *упрощение описания*. Исходя из этого закона посредством математической дедукции можно понять причины движения небесных тел и силы тяжести на земле. Обширная экспериментальная морфология, эфемериды планет от вавилонской эпохи до наших дней, оказывается, порождена этой простой формулой $F = kmm'/r^2$. Таким

*)Гипотез не выдумываю (лат.) — *прим. пер.*

образом, понятно, что все, подлежащее рассмотрению в качестве основной цели теоретической работы ученого, представляет собой упрощение описания, *уменьшение доли произвольного содержания* в описании. Очевидно, что эта цель имеет явные связи с причинностью и детерминизмом: в той мере, в какой процесс оказывается случайным или недетерминированным, он ускользает от контроля научного рассмотрения и приносит с собой изрядную долю произвольного содержания, которое не может быть устранено. В этом смысле можно сказать, что ученый «a priori» является детерминистом: признать в феноменах присущий им индетерминизм (как это иногда делается в квантовой механике и как это наперегонки повторяют неодарвинисты в теории эволюции) — значит вести себя преимущественно антинаучно. Но если ученый до некоторой степени профессионально постулирует существование детерминизма, то пусть он остережется придавать этому методологическому требованию онтологическое значение. В сущности, никто не знает, детерминистична природа или нет. Как будет показано ниже, описание и в некоторой степени объяснение возможны в теории, относительно которой нельзя установить, подчинена ли она строгому детерминизму. Так, лингвист вполне может одновременно верить в наличие у человека свободы воли и в возможность формализации синтаксиса языка...

2. Редукционистские объяснения и структуральные объяснения

В соответствии со значением, придаваемым интуитивному понятию причинности, можно различать два типа научного объяснения — редукционистское объяснение и структурное объяснение. Это можно изобразить в виде следующей схемы:

$$\text{Редукционистское объяснение} \begin{cases} \text{ориентированное на внешние причины} \\ \text{ориентированное на внутренние причины} \end{cases}$$

Структурное объяснение.

Пусть (X) — исследуемая морфология. На первой стадии морфология (X) мысленно изолируется от условий ее создания, и это будет что-то вроде первой попытки структурного типа. Затем в поисках объяснения мы возвращаемся к условиям создания (X): существуют ли объекты (Y), которые интуитивно предстают в качестве истока, причины морфологии (X)? В этом случае редукционистское объяснение, ориентированное на внешние причины, сведется к следующему образу действий:

мы изучим объекты (Y) в качестве причин (X) и тогда сможем понять морфологию (X). Например, в лингвистике редукционистский подход, ориентированный на внешние причины, сводится к утверждению о том, что язык — это морфология, созданная людьми в состоянии социального взаимодействия. Лингвистика, исследование морфологии (X) языка будет следствием изучения самого человека (Y), с какой бы точки зрения оно ни осуществлялось: с точки зрения анатомии или нейропсихологии, с точки зрения психологии или, наконец, с точки зрения социологии.

Если, напротив, кажется, что морфология развивается по собственной инициативе, без вмешательства внешних сущностей, мы прибегнем к редукционистскому подходу, ориентированному на внутренние причины. Мы постараемся выявить в носителе (X) наименьшие и очень устойчивые сущности, «атомы», взаимодействие которых мы можем формализовать. Объяснение такого редукционистского типа — это объяснение, предоставляемое статистической механикой газа. Мы задаем координаты и скорости каждой молекулы газа и записываем систему дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = X_i(x_i, p_i) \quad dp_i/dt = P_i(x_i, p_i),$$

содержащую $2N$ уравнений, где N — число молекул. Интегрируя эту систему, мы получаем явное и количественное описание ее эволюции.

Структурное объяснение имеет совершенно иную природу. Морфология (X) сама по себе на определенном уровне организации рассматривается как комбинаторика морфогенетических полей. Мы стремимся уменьшить долю произвольного содержания описания корпуса, выявляя его закономерности, его скрытые симметрии. Мы ставим себе целью, так сказать, аксиоматически создать морфологию (X) исходя из небольшого числа форм такого типа, которые способны породить новые формы с помощью объединения в пространстве. Таким образом, структурный подход основывается (хотя это едва ли было замечено) на возможности ввести по отношению к морфогенетическим полям операции алгебраического типа, в сущности, настоящую алгебру форм. Вообще говоря, в структурном подходе не имеется в виду детерминистское и исчерпывающее описание изучаемых процессов. Поскольку в его рамках, в сущности, не известно понятие причинности, он не стремится объяснить рассматриваемую морфологию (X) ни с помощью введения меньших сущностей, ни с помощью вмешательства внешних факторов, которые, по предположению, являются ее причиной.

3. Границы редукционистского и структурного подходов

а) *Редукционистский подход, ориентированный на внешние причины*, сталкивается с двумя трудностями. Первая из них связана с интуитивным, но часто с трудом поддающимся уточнению характером понятия причины. Например, в эмбриологии биологи, придерживающиеся этого подхода, говорят, что образование складок на зародышевом листке обязано силе сжатия, действующей на его края. Как бы хорошо ни осознавался этот механизм интуитивно, задача его математической формализации далеко не проста. Впрочем, эта трудность встречается и в рамках редукционистского подхода, ориентированного на внутренние причины. В нем часто прибегают к очень интуитивным понятиям вроде «соударения» атомов, математическая формализация которого оказывается весьма трудной. 2. Внешние факторы (Y), выступающие в качестве причин морфологии (X), вообще говоря, более сложны, чем морфология (X), которую и вызывает их действие. Это выглядит особенно поразительно на примере лингвистики: нейропсихология, психология, социология — это науки, намного менее развитые, намного менее формализованные по сравнению с лингвистикой, которую они хотели бы объяснить.

b) *Редукционистский подход, ориентированный на внутренние причины.*

Если модель механики газа является, вне всякого сомнения, одной из самых совершенных парадигм научного объяснения, она все-таки содержит два алгоритма, недостаточно отделенных друг от друга в сознании ученого: использование дифференциального исчисления в качестве парадигмы детерминистичного процесса и использования представления о взаимодействующих атомах. Несмотря на всеобщую веру в обратное, первый алгоритм (использование дифференциального исчисления) применим намного чаще, чем второй. Очень часто выбор «атомных» элементов становится проблемой (пример: что следует принять за «атом» в биологии — клетку или молекулу?). Может случиться так, что налицо окажется множество уровней организации, среди которых и предстоит сделать выбор.

Как только этот выбор сделан, остается в принципе выразить в количественной форме взаимодействия между элементами. Часто это оказывается слишком сложно без использования приближенных методов, воздействие которых на глобальное поведение системы нередко ускользает от какого-либо контроля. Более того, если даже удастся написать систему дифференциальных уравнений, то эта система будет содержать столько уравнений (число Авогадро равно $6 \cdot 10^{23}$), что ее непосредственное интегрирование становится невозможным. Тогда приходится прибегать к статистическим методам, как в теории идеального газа. Но в этом случае больше нет никакой морфологии! Только теория (локальная, а не глобальная) фазовых переходов позволила бы выявить некоторую морфологию. Классические количественные методы, основанные на использовании аналитических и, стало быть, непрерывных функций, с трудом допускают описание дискретных феноменов.

c) *Структурный подход.*

Структурный подход менее амбициозный, чем редукционистский, именно поэтому же является и менее плодотворным. Что делать дальше, после того как формальная схема выявлена? Как обосновать ее либо с помощью внутренних средств, либо прибегая к соображениям, заимствованным из ее окружения? Остановив свой выбор на разъяснении единственного уровня организации, мы без промедления погружаемся во мрак аксиоматической бесплодности. Кроме того, возникает проблема единственности формальной модели, совместимой с данной морфологией.

Во всяком случае, структурный подход предполагает возможность создать некоторые формы исходя из других, более элементарных форм и, следовательно, он неизменно опирается на алгебру форм. Существование такой алгебры в классическом смысле известно только для морфологий размерности один, относящихся к конечному типу, которые отождествляются с формальными языками. К проблеме алгебраизации многомерных форм еще не подступались до настоящего времени, и, возможно, одной из главных заслуг теории катастроф является некоторый прорыв в этой области. Она привносит с собой новое видение классической философской проблемы — проблемы соответствия математики и реальности.

4. Математика и реальность

Соответствие, часто наблюдаемое в многочисленных дисциплинах, изучающих живой и неживой мир, между эмпирической морфологией и структурой, математическим объектом, поднимает классическую проблему философии науки. Она может иметь три решения.

1. Первое решение приписывает это соответствие «предустановленной гармонии» между математикой и реальностью. Это — платонистская

точка зрения (или, точнее, пифагорейская): бог всегда занимается геометрией.

2. Второе решение приписывает появление математической структуры феномену локального равновесия или, как это принято выражать в механике, решению некоторой задачи на нахождение экстремума.

3. Третье решение — принятое в нашей модели — приписывает появление структуры данной гипотезе *обобщенности*: при любых условиях природа реализует наименее сложную локальную морфологию, совместимую с локальными начальными условиями.

Первое решение является чисто метафизическим. Только второе решение можно рассматривать как научное, поскольку оно иногда допускает количественный контроль. Так, согласно Пригожину, возникновение гексагональной сети ячеек конвекции у жидкости, нагреваемой на дне сосуда (феномен Бенара), объясняется достижением системой локального минимума производства энтропии.

С третьим решением связано то преимущество (и то неудобство), что оно ведет к теории более глубокой, чем вторая точка зрения (так как оно постулирует только количественный[пр1] и локальный детерминизм). Впрочем, вторая и третья точки зрения не являются несовместимыми: так, решение экстремальной задачи, вроде задачи Плато (определить минимальную поверхность с заранее заданной границей), будет давать «обобщенные» особенности для почти всех границ.

Модель катастроф предоставляет средства для объяснения присутствия структур, она динамически обосновывает их появление и их устойчивость. Тогда оказывается, что понятия причинности, равно как и умопостигаемости, которое привносит с собой понятие причинности, снова введены. В сущности, модель катастроф сводит любой каузальный процесс к единственному процессу, интуитивное обоснование которого не представляет собой проблемы. Конфликт — это, по Гераклиту, отец всех вещей. Равным образом эта модель позволяет понять структурную автономию каждого уровня организации. Равным образом можно понять, как эта модель применяется для описания отношений между уровнями: в самом деле, сбой детерминизма на некотором уровне часто может быть устранен путем принятия во внимание уровня с более тонким строением. (Так, в генетике выбор фенотипического характера животного может определяться химическим составом хромосомы.) Наоборот, модель может объяснять некоторые межуровневые изоморфизмы, например, тот факт, что определенные (энзиматические) молекулярные механизмы имитируют поведение всего живого существа, находят свое обоснование в самой идее катастрофы.

Мы будем исходить из модели классической механики: эволюция системы может быть описана с помощью динамической системы, т. е. некоторым векторным полем X над дифференцируемым многообразием M. Но мы придаем этой модели только ограниченное значение, тогда как процесс целиком должен быть описан непрерывным полем таких динамик. (Так мы снова сталкиваемся с примитивной моделью квантовой теории поля с ее непрерывным полем осцилляторов). Это позволит нам связать структурную устойчивость некоторой морфологии со структурной устойчивостью динамической системы, понятие которой нам теперь необходимо уточнить.

5. Динамические системы. Асимптотические состояния. Аттракторы

Определение 1. Динамическая система, состоящая из (M, X), задается дифференцируемым действием группы R действительных чисел на многообразие M^n, фазовое пространство. По определению такое действие задает в каждой точке M векторное поле X. Наоборот, задание векторного поля X в M позволяет посредством локального интегрирования определить «росток действия» R на M. Если M есть компакт, получаем глобальное действие.

Орбитой $g(m)$ точки m из M называется множество образов точки m, получающееся в результате преобразований g из группы R.

Определение 2. Пусть g является орбитой системы. Точка m из M называется ω-предельной точкой орбиты g, если для всех $\varepsilon > 0$ и $t_0 > 0$ существует такой момент времени $T > t_0$, что точка m_T находится от точки m на расстоянии, меньшем чем ε. Множество ω-предельных точек орбиты g, обозначаемое как $\omega(g)$, есть замкнутое инвариантное множество траекторий.

Определение 3. Две траектории g, g' называются *асимптотическими*, если они имеют одно и то же ω-предельное множество.

Две точки p, p' называются асимптотически эквивалентными, если их траекотрии являются асимптотическими. Тем самым определяется отношение эквивалентности между точками M. В определенном смысле целью качественной динамики является уточнение топологической природы этой эквивалентности. В некоторых случаях это отношение «почти всюду» открыто: каждому асимптотическому состоянию соответствует открытое множество из M, его *бассейн*. В тех частях M, где существуют эти бассейны, можно говорить, что мы находимся в ситуации детерминизма: конечное состояние устойчиво относительно малых возмущений данных. В других случаях эти классы беспорядочно перемешаны друг с другом, и тогда налицо ситуация практически полного индетерминизма. Это означает, что смесь детерминизма и индетерминизма, упомянутая в § 1.1, оказывается уже реализованной в модели классической динамики, когда она интерпретируется «асимптотически».

Определение 4. *Аттрактором* поля X, определенного над M, называется подмножество A множества M, удовлетворяющее следующим условиям.

(i) Почти любая траектория в A является плотной в A.

(ii) Существует такая фундаментальная система окрестностей U_i подмножества A в M, что a) любая траектория произвольной точки $u \in U_i$ допускает A в качестве ω-предельного множества. b) Если a — точка из U_i такая, что ее ω-предельное множество (предел при $t = -\infty$) пересекает A, то a — это точка из A.

Примеры.

a) Точечный аттрактор.

В этом случае множество A сводится к единственной точке a. Если рассмотреть матрицу линейных членов поля X в точке a (обозначаемую через $j^1(X)(a)$), т. е. струю порядка *один* поля X в точке a, мы получаем в a аттрактор, если все собственные значения этой матрицы имеют отрицательные действительные части. Такой аттрактор будет называться «обобщенным». В самом деле, поле вокруг a является локально структурно-устойчивым в том смысле, что для всякого поля X', достаточно близкого к X (в топологии C^1), существуют окрестности V_i аттрактора a' и гомеоморфизм $h\colon U_i \to V_i$ такой, что $h(a) = a'$ и любая орбита в X переходит в орбиту X'.

b) Замкнутая траектория.

Пусть (c) — одна из таких траекторий, гомеоморфная окружности (S^1). Пусть H — росток гиперповерхности, трансверсальных к c в точке q, принадлежащей c. Траектория, начинающаяся в точке m из H, впервые снова пересечет H в точке m'. Преобразование (называющееся преобразованием Пуанкаре – Флоке) $h\colon m \to m'$ есть росток диффеоморфизма с неподвижной точкой q. Если собственные значения матрицы Якоби $j^1(h)(g)$ по модулю оказываются меньше единицы, то замкнутая траектория является обобщенным аттрактором. В самом деле, для любого поля X', достаточно близкого к X, найдется такая замкнутая траектория c', близкая к c, и гомеоморфизм g, переводящий окрестность траектории c в окрестность траектории c', что образ орбиты из X под действием g является орбитой из X' (свойство структурной устойчивости).

Эти два примера очень просты в том, что касается топологии аттракторов. Есть и другие примеры, значительно более сложные: Р. Уильямс и М. Шуб привели примеры аттракторов, обладающих очень сложной топологической структурой. Описание и классификация аттракторов, локально структурно-устойчивых, — в несколько менее строгом смысле, который будет уточнен ниже, — это, несомненно, одна из главнейших задач современной качественной динамики. В этом отношении можно сделать следующие наблюдения.

Определение 5. *Функция Ляпунова.*

Пусть (M, X) — динамическая система. *Функция Ляпунова*, определенная на открытом множестве U из M, есть вещественная функция $F\colon U \to R$, возрастающая на каждой траектории из X (в точке, где $X = 0$, в общем случае накладывается условие $dF = 0$). Функция Ляпунова может быть глобальной ($U = M$) или локальной (U есть собственное открытое подмножество из M). В этом случае предполагается, что функция собственная ($F^{-1}(K)$ — компакт, если K — компакт).

Если A — аттрактор в M, то в силу гипотезы из определения 4 можно найти такую открытую окрестность U для A, что $h_t(u)$ будет открытым подмножеством U. Если предположить, что U снабжена гладкой границей W, можно предположить также, что $h_t(W)$ суть многообразия уровня локальной собственной функции Ляпунова для A.

Итак, если A содержится в трубке $F = \varepsilon$, то у всякого поля X', достаточно близкого к X, имеется следующее свойство: X' *входит* в трубку $F = \varepsilon$, и вследствие этого у X' существует один или много аттракторов, расположенных в этой трубке. Следовательно, понятно, что такой аттрактор, как A, не может «взорваться» из-за малых возмущений поля. Напротив, с аттрактором может случиться «направленный внутрь взрыв», в результате которого он распадется на один или много податтракторов меньшей, в общем случае, размерности. Но по причине такой утраты размерности этот каскад направленных внутрь взрывов должен прекратиться. Это обусловливает выдвижение следующей гипотезы, которая, насколько мне известно, еще не была опровергнута.

«Спектральная» гипотеза.

Пусть M — компактное многообразие и $D(M)$ — пространство векторных полей над M с топологией C^r, $r \leqslant 1$. Существует такое всюду плотное открытое множество U из $D(M)$, что любое поле X из U обладает следующими свойствами:

(i) X имеет только конечное число аттракторов A_i, и объединение $B(A_i)$ бассейнов этих аттракторов всюду плотно в M.

(ii) Каждый из аттракторов «топологически» структурно-устойчив: для любого поля X', достаточно близкого к X в U, существует гомеоморфизм h, определенный на окрестности U_i атрактора A_i, образ которого является аттрактором A'_i из X'. (Но этот гомеоморфизм несовместим с орбитами...).

Определение 6. Если единственный аттрактор, представленный в X, — это само многообразие M, то говорят, что X является *эргодическим* в M.

6. Случай гамильтоновых систем

Гамильтонова система определяется симплектическим многообразием M^{2n}, т. е. многообразием четной размерности, снабженным замкнутой 2-формой максимального ранга (как $\alpha = \sum dp_i \wedge dq_i$) с действительной функцией H: $M^{2n} \to \mathbb{R}$, *гамильтонианом*. Из гамильтониана по формуле: $i(X) \cdot \alpha = dH$ (формула Гамильтона – Якоби) выводится векторное поле X.

Известно, что поле X допускает гамильтониан H в качестве первого интеграла и оставляет инвариантной форму a (как и ее n-ую внешную степень, меру *Лиувилля*). Из этого следует, что на гиперповерхности постоянной энергии $H = \mathrm{const}$ поле X не допускает аттракторов. (Гамильтонова динамика допускает обратимость по времени: однако сомнительно, что можно получить хоть какую-то феноменологию без некоторой необратимости времени: чтобы что-то происходило, необходимо, чтобы будущая ситуация была бы предпочтительнее настоящей, и именно это исключает динамику, в которой стрела времени могла бы изменить свое направление на противоположное. Вот почему согласование такой чисто гамильтоновой теории, как квантовая механика, с феноменологией требует постулата «ad hoc» («Для данного случая» (лат.). — *Прим. перев.*), *теории измерения*, постулата, который отводит экспериментатору роль, не определенную даже по отношению к динамике теории.)

Тем не менее в гамильтоновых системах существуют некоторые инвариантные замкнутые множества, которые обладают структурной устойчивостью по отношению к гамильтоновым возмущениям и которые можно рассматривать как «неопределенные аттракторы». Именно такова, например, замкнутая центральная траектория (изученная Колмогоровым, Мозером и другими). В этом случае диффеоморфизм Пуанкаре – Флоке является симплектическим диффеоморфизмом. Из этого следует, что его собственные значения распределяются либо в виде четверок («квартетов» вида λ, $\bar{\lambda}$, λ^{-1}, $\bar{\lambda}^{-1}$), либо в виде двоек (дуэтов) $(\mu, \bar{\mu})$, где $|\mu| = 1$, и от одной конфигурации к другой можно перейти только посредством столкновения пар корней на единичной окружности. Диффеоморфизм Пуанкаре является «центральным», касательным к вращению. Из этого можно вывести существование множества ненулевой меры, состоящего из траекторий, закручивающихся спиралью вокруг данной замкнутой траектории, но не удаляющихся от нее. Все эти траектории явно определяют «то же» термодинамическое состояние, что и начальная замкнутая траектория, и глобальная система не является эргодической.

Пример. Гармонический осциллятор.

Если $M^{2n} = \mathbb{C}^n$, $H = \sum p_i^2 + q_i^2$, $z_i = q_i + ip_i$, то гиперповерхности $H = \mathrm{const}$ являются сферами размерности $2n - 1$. Все траектории являются окружностями, которые определяют в S^{2n-1} *расслоение Хопфа* на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{(n-1)}$. Очевидно, здесь речь идет о ситуации, совсем не обладающей обобщенностью. Тем не менее, как было показано в работах Арнольда, первый интеграл гамильтоновой системы обладает определенной структурной устойчивостью, имеющей статистическую форму. Именно это объясняет то, что такие инварианты, как кинетические моменты, имеют некоторый смысл, несмотря на тот факт, что порождающие их симметрии являются приблизительными... В последующем изложении мы будет обращаться к гамильтоновым динамикам лишь в исключителных случаях ввиду их несовместимости с необратимостью феноменов.

7. Модель

Пусть $D = B \times T$ — базовая область, где происходит рассматриваемый морфологический процесс. Будем считать, что в каждой точке u из D множество локальных состояний процесса может быть параметризовано точками компактного дифференцируемого многообразия M, одного и того же для любой точки из D: *многообразия внутренних* *состояний*. Таким образом, мы приходим к параметризации всего множества локальных точек процесса точками произведения $E = D \times M$, тривиально расслоенного над D со слоем расслоения M, p: $E \to D$.

Определение 7. *Метаболическим полем* над D называется векторное поле X, определенное над E, касательное к слоям соответствующего расслоения p. Метаболическое поле может быть определено таким образом: каждой точке $u \in D$ сопоставляется поле $X(u)$ на слое M. Следовательно, имеется отображение G из базы D на пространство $D(M)$ векторных полей над M. Поле $X(u)$ определяется системой дифференциальных уравнений $dm/dv = X(m; u)$.

В этой формуле считается, что изменения X как функции u происходят медленно с точки зрения модуля поля X. Параметр v должен рассматриваться как *«локальное время»*, в принципе отличное от наблюдаемого макроскопического времени, которое параметризует ось T. Итак, мы выразили тот факт — на практике достаточно общий, — что локальные эволюции являются намного более быстрыми, чем глобальная эволюция морфологии, удерживающая лишь крупномасштабные события.

Определение 8. *Локальное состояние процесса.*

Оно определяется сечением S расслоения p: $E \to D$, которое связывает с каждой точкой $u \in D$ представителя локального состояния в u в слое $M(u) = p^{-1}(u)$. Предполагается, что это сечение определено и дифференцируемо в D, за исключением некоторого множества $K \subset D$, множества катастрофы.

Такое представление является детерминистским (за исключением, может быть, K). Мы получим более реалистическое представление, — термодинамического характера, — заменяя сечение $s(u)$ его асимптотическим состоянием в динамике слоев. Тогда, принимая спектральную гипотезу, а также то, что поле $G(u)$ относится к обобщенному типу, мы увидим, что предельное множество $\omega(s(u))$ будет (с топологической точки зрения) структурно-устойчивым аттрактором, который мы обозначим как $\overline{s(u)}$. Далее, этот аттрактор равным образом определен для близких полей и, вследствие непрерывности, значение $\overline{s(u')}$ для регулярного u', достаточно близкого к u, есть аттрактор, полученный путем деформации $\overline{s(u)}$ в процессе перехода от поля $G(u)$ к полю $G(u')$. Таким образом, с каждым аттрактором «обобщенных» полей метаболического поля G можно связать его «область» в D, которая представляет собой множество таких точек u из D, что $\overline{s(u)}$ является этим аттрактором. Не следует смешивать *область* аттрактора, которая есть открытое множество базы D, с его *бассейном*, который есть открытое множество слоя M «внутренних состояний».

В точке k, принадлежащей множеству катастрофы K, сечение $\overline{s}(k)$ не определено в принципе. Однако при желании можно определить $\overline{s}(k)$ как пороговое множество, отделяющее друг от друга бассейны аттракторов, конкурирующих в k. Такое сечение имеет свойство полунепрерывности:

$$\lim s(k') \subset s(k), \text{ если } k' \text{ стремится к } k.$$

Исходя из значения метаболического поля G и начального значения s при $t = 0$, невозможно, вообще говоря, уточнить природу и положение множества катастрофы K. Однако, в том случае, когда поле G является потенциальным полем, можно сформулировать некоторые более или менее обоснованные правила (условие Максвелла), которые позволяют определить множество K.

8. Бифуркация

Обозначим через Σ особое множество полей в $D(M)$, не удовлетворяющих спектральной гипотезе. В этом случае динамика градиентна Σ — это гиперповерхность с особенностями в $D(M)$: она обнаруживает стратифицированную структуру, так что в каждой точке страта конечной коразмерности имеется локальная модель трансверсального сечения, определяемого полуалгебраическим множеством. Если сечение s дано для $t < t_1$, может случиться так, что в точке u, соответствующей $t = t_1$, аттрактор $s(u)$ утратит структурную устойчивость. Тогда $G(u)$ есть поле из Σ. Следовательно, мы видим, что часть множества катастрофы определяется тем фактом, что $G(u)$ находится в Σ, когда аттрактор $\overline{s(u)}$ становится неустойчивым. Этот феномен — разрушение аттрактора посредством изменения поля и его замена новыми аттракторами — в качественной механике известен под названием *бифуркации* (похоже, что терминология восходит к Якоби и соответствует немецкому «Abzweigung»)*).

Когда аттрактор $A = s(u)$ разрушается бифуркацией, появляется некоторое количество аттракторов — близких и удаленных, — для того чтобы захватить свою долю его бассейна, и эти аттракторы-наследники разделят между собой окрестность точки u при $t > t_1$. Конкуренция между этими наследниками порождает морфологию ударных волн в D.

---

*) Ответвление (нем.) — *прим. перев.*

В подобном случае можно иногда допустить, что этот раздел областей определяется внутренними характеристиками поля $X \subset D(M)$. (Это будет случай условия Максвелла, описанный ниже.) Таким образом, со стратом бифуркации σ из Σ связан страт универсальной катастрофы J в $D(M)$. (Говоря образно, *бифуркация порождает катастрофу*.)

Если отображение G, которое определяет метаболическое поле, является трансверсальным на страте S бифуркации и на стратифицированном множестве конфликта J, которое с ним связано, то локальное множество катастрофы K определяется прообразом $G^{-1}(J)$. В качестве трансверсального сечения стратифицированного множества J оно допускает существование локальной модели (вообще говоря, полуаналитической). Итак, получается, что локальная морфология может быть задана локальным *морфогенетическом полем, креодом.*

9. Случай градиентов

На этот раз предположим, что локальная динамика $X(u)$ определяется потенциалом $X(u) = -\mathrm{grad}_m V(m;u)$, $m \in M$, $u \in D$. Поля градиентов обладают на самом деле простыми свойствами: нет никакой рекуррентности, и каждая траектория проходит от критической точки из V до другой критической точки. Почти любая траектория в конце достигает минимума, который, вообще говоря, является невырожденной квадратичной формой. Разложение многообразия M на бассейны локально будет относительно простым: бассейны разделены гиперповерхностями с особенностями, которые могут содержать «точки перегиба» типа $y = x^{\alpha}$ (если это необходимо, то большей размерности).

Другое преимущество гипотезы градиентов заключается в возможности заменить исследование векторных полей — еще довольно сложное и плохо разработанное — исследованием потенциалов. Таким образом, мы возвращаемся к изучению возможных бифуркаций минимумов числовых функций — к проблеме, при нынешнем развитии технических средств разрешимой с помощью теории «универсальной развертки», которая является предметом следующей главы. В каждой точке $u \in D$ соответствующий локальный режим определяется одним из аттракторов $X = \mathrm{grad}_m V(m;u)$, т. е. одним из минимумов[пр6] потенциала V. Но в общем случае V допускает множество минимумов, так что имеется некоторая недетерминированность выбора устойчивого режима, который побеждает в u. Простое правило для устранения этой недетерминированности есть

Условие Максвелла.

В любой точке $u \in D$ локальный режим определяется абсолютным минимумом функции $V(m; u)$.

Этот абсолютный минимум μ в общем случае есть невырожденная, следовательно, структурно-устойчивая, квадратичная форма. Следовательно, существует открытое множество $U \subset D$, над которым μ побеждает. Расширение области U будет прекращено при наличии двух обстоятельств.

(i) Минимум μ, всюду определенный и устойчивый, перестает быть абсолютным минимумом, поскольку меньше него оказывается другой минимум μ'. В точке v из U эти два минимума имеют равные значения. Тогда говорится, что v принадлежит к *страту конфликта*;

(ii) либо минимум μ становится структурно-неустойчивым; тогда точка v принадлежит к *страту бифуркации.*

Эти страты суть прообразы соответствующих стратов в функциональном пространстве $L(M; \mathbb{R})$ действительнозначных функций C^∞ на M. В этом пространстве страты конфликта имеют коразмерность один и содержат на своей границе страты бифуркации, имеющие, по меньшей мере, коразмерность два.

Условие Максвелла (названное так потому, что именно благодаря ему определяется горизонтальный участок кривой (изотермы) Ван-дер-Ваальса) по своему алгебраическому характеру слишком удобно и часто отвлекает от физической реальности. Так, можно было бы оценить глобальную устойчивость минимума с помощью других функций, например, с помощью глобального объема его бассейна или относительной высоты самого низкого порога у границы бассейна. Выбор такой функции вместо условия Максвелла некоторым образом сказывается — вообще говоря, минимально — на топологии множества конфликта.

Этому виду правил может быть брошен более серьезный упрек: они совершенно пренебрегают феноменами — часто хорошо наблюдаемыми — *запаздывания* или *гистерезиса.* В некоторых случаях можно получить совершенное запаздывание: минимум существует, пока его бассейн не разрушается бифуркацией целиком.

Пример. Катастрофа Римана – Гюгонио.

Многообразие M здесь имеет размерность один (ось Ox), в пространстве D размерности два (координаты u, v) имеется потенциал:

$$V = x^4/4 + ux^2/2 + vx.$$

Множество критических точек определяется посредством

$$\partial V/\partial x = x^3 + ux + v.$$

Дискриминант этого уравнения третьей степени равен

$$4u^3 + 27v^2 = 0.$$

Имеется три корня (два минимума), расположенных внутри полукубической параболы $4u^3 + 27v^2 < 0$. Условие Максвелла отводит для множества конфликта полуось $v = 0$, $u \leqslant 0$; начало координат есть страт бифуркации, минимум $V = x^4$ там неустойчив. Если принять условие «совершенного запаздывания», режим, господствующий в точке (u, v) зависит от истории этой точки. Например, если описывается параллель к v $(u = -k^2)$ в направлении возрастания v, то локальный режим, связанный с отрицательными v (единственный, если v достаточно велико), существует до линии верхней ветви полукубической параболы:

$u = 2t^3$,

$u = -3t^2 \quad t > 0$ (см. рис 1.).

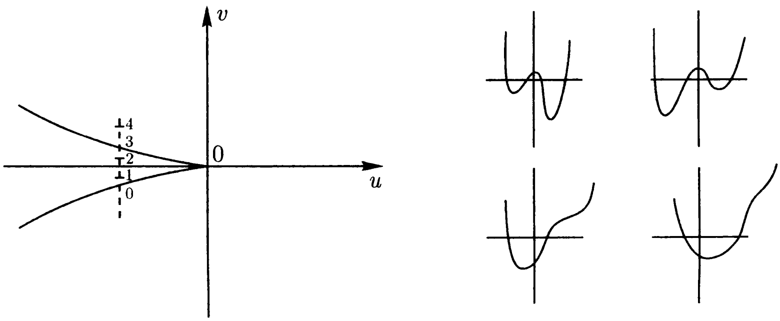


Рис. 1

Примечания редактора

[пр1] Следует читать: качественный

Глава 3[пр0]

Теория универсальной развертки[пр1]

3.1. Универсальная развертка ростка функции

Существование «стратификации» функционального пространства $L(M, \mathbb{R})$ функций на многообразии M, например такой, которая участвует в бифуркации минимумов из главы 2, в конечном счете основывается на некоторой теории — теории универсальной развертки ростка отображения. Этой теории можно придать определенную математическую форму. Можно различать:

1. Алгебраическую теорию, которая является завершенной в случае функций, а также в случае ростков отображений (Дж. Мазер). Ниже мы представим существенные идеи этой теории применительно к функциям.

2. Топологическую теорию, которая является более общей и основывается на понятии «стратифицированного морфизма без взрыва». Была предложена полная редакция этой теории (Дж. Мазер [NTS][пр2]).

3. Наконец, имеется теория универсальной развертки действий группы, которая используется в физике, в теории нарушения симметрии[пр3] и которой мы здесь не будем заниматься.

3.1.1. Алгебраическая теория

Определение 1. Пусть $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ есть росток дифференцируемого отображения (что в дальнейшем всегда будет означать C^∞). Развертка ростка f образуется из некоторого отображения

$$\begin{tikzcd}
F : (\mathbb{R}^n, 0) \times (U, 0) \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{R}^p \times (U, 0) \arrow[dl, "p'"] \\
& (U, 0) &
\end{tikzcd}$$

$(U, 0)$ (U — окрестность 0 в R^k)

совместимого с расслоениями в исходном и в конечном множествах, которые определены проекциями p, p', причем

$$F|\{(\mathbb{R}^n, 0)\{0\}\} = f.$$

Определение 2. Если F есть вышеупомянутая развертка, то задано еще одно пространство параметров $(V, 0')$ (какой угодно размерности), а также дифференцируемое отображение g: $(V, 0') \to (U, 0)$. Назовем *разверткой* F, *индуцированной* отображением g, развертку G, однозначно определенную коммутативной диаграммой[пр4]:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, 0) \times (V, 0') \arrow[rr, "G"] \arrow[dr] \arrow[ddd, "\mathscr{J} d \times g"'] & & \mathbb{R}^p \times (V, 0') \arrow[dl] \arrow[ddd, "\mathscr{J} d \times g"] \\
& (U, 0') \arrow[d, "g"] & \\
& (U, 0) & \\
(\mathbb{R}^n, 0) \times (U, 0) \arrow[rr, "F"'] \arrow[ur] & & \mathbb{R}^p \times (U, 0). \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Определение 3. *Эквивалентность двух разверток.*

По отношению к двум данным разверткам F, G ростка f, соответствующим пространствам параметров $(U, 0)$, $(V, 0')$, говорится, что эти развертки эквивалентны (изоморфны), если существуют локальные диффеоморфизмы

$$H : (\mathbb{R}^n, 0) \times (U, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0) \times (V, 0'),$$
$$H' : \mathbb{R}^p \times (U, 0) \to \mathbb{R}^p \times (V, 0'),$$

имеющие форму $H(x, u) = [hu(x), k(u)]$, $H'(y, u) = [hu'(y), k(u)]$, где k есть такой локальный диффеоморфизм k: $(U, 0) \to (V, 0')$, что следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, 0) \times (U, 0) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] \arrow[ddd, "H"'] & & \mathbb{R}^p \times (U, 0) \arrow[dl] \arrow[ddd, "H'"] \\
& (U, 0) \arrow[d] & \\
& (V, 0') & \\
(\mathbb{R}^n, 0) \times (V, 0') \arrow[rr, "G"'] \arrow[ur] & & \mathbb{R}^p \times (V, 0'). \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Цель нашей теории — показать, что если росток f удовлетворяет некоторому алгебраическому условию конечности (почти всегда выполняющемуся в случае функций при $p = 1$), то существует развертка F ростка f, которую можно назвать «версальной» в том смысле, что любая другая развертка эквивалентна развертке, индуцированной ею посредством подходящего отображения (C^∞) в пространстве параметров универсальной развертки[пр5]. Затем мы покажем, что две версальные развертки с минимальной размерностью эквивалентны, и именно это определяет, с точностью до эквивалентности, универсальную развертку.

3.1.2. Бесконечно малая форма предшествующих определений

Пусть $f\colon N \to P$ есть дифференцируемое отображение многообразия N на многообразие P. Путь отображений f_t есть отображение F: $N \times I \to P \times T$, совместимое с проекциями $N \times I$ и $P \times T$ на I (это «развертка» в том смысле, в котором об этом говорилось выше). Предположим, что $F|(N, 0) = f$. Можно построить вектор, касательный к пути F в функциональном пространстве $L(N, P)$. Каждой точке x из N отображение F сопоставляет путь $f_t(x)$ в P, который начинается непременно в образе $y = f(x)$. Следовательно, касательный вектор df_t/dt определяется заданием в каждой точке x из N вектора, касательного к P в точке-образе $y = f(x)$. Рассмотрим расслоения TN, TP векторов, касательных к N и P соответственно, и пусть Tf будет расслоением, индуцированным на N из TP посредством отображения f. Получаем производные отображения

$$
\begin{tikzcd}
TN \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr] & T_f \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & TP \arrow[d] \\
& N \arrow[r, "f"] & P.
\end{tikzcd}
$$

Бесконечно малая деформация отображения f является, по определению, вектором, касательным к пути таких отображений, как f_t. Следовательно, это сечение расслоения $T_f \to N$.

Однако среди бесконечно малых деформаций отображения f некоторые индуцированы бесконечно малыми диффеоморфизмами исходного пространства N или конечного пространства P. Если, например, h_t есть семейство с параметром t диффеоморфизмов многообразия N с $h_0 = id_N$, то формула $g_t = f \circ h_t$ определяет бесконечно малую деформацию отображения f. Если X есть векторное поле над N, определенное производной dh_t/dt, то X есть сечение расслоения $TN \to N$, и по определению отображения $f_* = j^1(f)$ для бесконечно малой деформации g_t многообразия f получаем формулу

$$c = f_x(x), \qquad \text{где} \quad c = dg_t/dt.$$

Точно так же бесконечно малый диффеоморфизм с конечным множеством P определяется векторным полем Y над P, и деформация, порожденная композицией с отображением f, — это сечение $c' = f^{x-1}(Y)$.

Определение 4. Отображение $f\colon N \to P$ называется *инфинитезимально устойчивым*, если любая бесконечно малая деформация с отображения f имеет вид $f_*(X) + f^{*-1}(Y)$, где X, Y — векторные поля над N и P соответственно.

Иначе говоря, если f является инфинитезимально устойчивым, то действие бесконечно малой деформации отображения f может быть *компенсировано* подходящими бесконечно малыми диффеоморфизмами, действующими из необходимого множества в конечное.

Если соответствие $c \to (X, Y)$ можно осуществить с достаточной степенью непрерывности (имея в виду дифференцируемые семейства сечений c) на всем открытом множестве W в функциональном пространстве, то тогда можно показать (Дж. Мазер), что путем интегрирования векторных полей X, X любая конечная «достаточно малая» деформация отображения f в W может быть получена в результате действия подходящих диффеоморфизмов h, h' из N и P соответственно (отсюда следует, что инфинитезимально устойчивый росток является устойчивым).

Существенным инструментом этого доказательства является *подготовительная теорема*, которую мы сейчас сформулирует. Дадим сперва еще несколько определений.

Определение 5. *Инфинитезимальная деформация развертки.*

Пусть $(N, 0) \times (U, 0) \xrightarrow{F} (P, 0) \times (U, 0)$ есть развертка параметров $(U, 0)$. Инфинитезимальной деформацией развертки F называется производная при $t = 0$ параметрической деформации F_t развертки F, которая проецируется на деформацию J_t пространства параметров

$$\begin{array}{ccc} N \times U \times I & \xrightarrow{F_t} & P \times U \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \times I & \xrightarrow[J_t \times id_t]{} & U \times I. \end{array}$$

Следовательно, это сечение расслоения T_f, индуцированного из $T(P \times U)$ действием F над $N \times U$, сечение, имеющее вид

$$Y(x, f_u(x), u) + U(u),$$

где $U(u)$ обозначает векторное поле над пространством параметров U ($U = dJ_t/dt$). Среди деформаций развертки существуют такие, которые порождены параметрическими эквивалентностями, имеющие форму $F_t = H'_t \circ F \circ H_t$, где H_t и H'_t — диффеоморфизмы из $N \times U$, и $P \times U$ проецирующиеся на такой же диффеоморфизм из U.

$$\begin{array}{ccc}
N \times U \times I & \xrightarrow{H_t} & N \times U \times I \\
\downarrow & & \downarrow \\
U \times I & \xrightarrow{J_t \times id_t} & U \times I \\
\uparrow & & \uparrow \\
P \times U \times I & \xrightarrow[H'_t]{} & P \times U \times I.
\end{array}$$

Определение 6. Говорят, что развертка является *инфинитезимально устойчивой*, если любая бесконечно малая деформация этой развертки индуцирована бесконечно малой эквивалентностью.

Это означает, что любое сечение расслоения T_f в соответствии с диаграммой

$$\begin{tikzcd}
T(N) \times T(U) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d] & T_F \arrow[dl] \arrow[r, "F^*"] & T(P) \times T(U) \arrow[d] \\
N \times U \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & & P \times U \arrow[dl] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

записывается в виде: $\delta f_u(x) = F_*(x) + F^{-1}(Y_n)$, где X и имеет вид $X(x, u) + \underset{\sim}{U}(u)$ и $Y_u = Y(F(x, u) + \underset{\sim}{U}(u)$, где $\underset{\sim}{U}(u)$ есть векторное поле над пространством параметров U.

3.1.3. Классическая подготовительная теорема

Сначала рассмотрим классическую подготовительную теорему. Если $f(z)$ голоморфная функция в окрестности U нуля в $\mathbb{C}$ и $P(z)$ — многочлен степени k, все корни которого находятся в U, то существуют функции $P(z)$ и $Q(z)$, голоморфные в U, и такой многочлен $R(z)$ степени $k-1$, что

$$f(z) = P(z) \cdot Q(z) + R(z).$$

Это тождество, связанное с размножением, допускает следующую геометрическую интерпретацию. В пространстве $H(u)$ функций, голоморфных на U (снабженном, например, топологией Фреше), идеал голоморфных функций, порожденный многочленом $P(z)$, имеет коразмерность k. В самом деле, если все корни c_1, $c_2 \dots c_k$ многочлена $P(z)$ отличны друг от друга, то для того, чтобы функция $f \in H(u)$ была кратна $P(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(c_1) = f(c_2) = \dots = f(c_k) = 0$, что означает равенство нулю k независимых линейных форм над $H(u)$. Если имеются кратные корни, аргументация остается прежней, но для корня c кратности s следующие s независимых условий: $f(c) = f'(c) = \dots f^{(s-1)}(c) = 0$.

С другой стороны, остаток $R(z) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} a_j z^j$ представляет собой *интерполяционный многочлен Лагранжа*, определенный формулами: $R(c_j) = f(c_j)$ и $R(s)(c_j) = f(s)(c_j)$ для s, строго меньших кратности корня c_j. Следовательно, векторное поле многочленов $\sum\limits_{j=1}^{k-1} a_j z^j$ оказывается дополнением (R) идеала $I(P)$ в $H(u)$, и тождество, связанное с размножением, означает, что всякий вектор из $H(u)$ является суммой вектора из I и вектора из дополнения R.

Теперь предположим, что $P(z)$ имеет вид: $P_u(z) = z^k + \sum u_i z^i$, где u_i достаточно малы, для того чтобы все корни P_u находились в U. Тогда пространство (R) многочленов степени $k-1$, являющееся дополнением идеала $I(P_0) = z^k$, остается дополнением всех идеалов $I(P_u)$ для u, достаточно близких к нулю. Следовательно, существует такой оператор проектирования p_u, зависящий от u, что $f(z) = P_u(z)Q(z,u) + p_u(f)$, и оператор проектирования определен интерполяционным многочленом Лагранжа.

Фундаментальный факт, выражаемый подготовительной теоремой Вейерштрасса – Руккерта, заключается в том, что коэффициенты $a_j(u)$ многочлена $p_u(f)$ являются голоморфными функциями в пространстве переменных u_j (в достаточно малой окрестности начала координат $u = 0$). Этот факт классически доказывается с помощью формулы Коши. Можно было бы легко убедиться в непрерывности $a(u)$ в простейшем случае — в случае двух корней c, c', стремящихся к одному и тому же значению, которое можно положить равным нулю. После вычитания и деления многочлена-остатка $R(z)$ на независимые члены мы приходим к рассмотрению линейной функции

$$\frac{f(c)-f(c')}{c-c'}+\frac{c'f(c)-cf(c')}{c'-c}.$$

Итак, две функции в числителе обращаются в нуль на диагонали $c - c' = 0$, которая представляет собой гладкое многообразие. Следовательно, они кратны разности $(c - c')$, причем частное голоморфно по c, c' в обоих случаях и симметрично по $c - c'$ (значит, оно является четным по $|c - c'|$, нормальном к страту). Из этого следует, что коэффициенты $a_j(u)$ голоморфны на стратах коразмерности один дискриминатного многообразия многочлена $P(u)$, поэтому, согласно теореме Хартогса (Hartogs), они голоморфны всюду (т. е. на стратах большей коразмерности).

Непрерывность оператора проектирования p_u является фактом, справедливость которого распространяется на функции с любым числом переменных. Пусть U будет окрестностью нуля в $\mathbb{C}^n(z_1, z_2, \dots z_n)$, и пусть $g_i(z_j)$ будет системой таких n функций, голоморфных в U, что идеал этих g_i определяет нуль с кратностью k (это означает, что для почти любой достаточно малой величины β система $g_i(z_j) = \beta_i$ задает k изолированных точек, достаточно близких к нулю). Тогда (по той же причине, что и выше) идеал $I(g_i)$, порожденный функциями g_j, имеет коразмерность k в пространстве $H(U)$ голоморфных функций над U. Если рассмотреть алгебру $\mathbb{C}[[z_i]]$ формальных степенных рядов в нуле, то идеал, порожденный функциями g_j в $\mathbb{C}[[z_i]]$, обладает мощностью максимального идеала, и фактор-алгебра $\mathbb{C}[[z_i]]/I(g_i)$ имеет размерность k. Обозначим через $b_1 \dots b_k$ систему многочленов, образующих базу этой фактор-алгебры. Тогда векторное пространство, порожденное $b_1 \dots b_k$ над $\mathbb{C}$, образует дополнение R идеала $I(g_i)$ в $H(U)$. Следовательно, тогда найдется такой оператор проектирования P, отображающий $H(u)$ на R, что для всякой $f \in H(u)$

$$f - p(f) \equiv 0 \mod (g_1, g_2, \dots g_k).$$

Теперь предположим, что мы подвергаем идеал (g_i) воздействию малых возмущений, например, полагая: $g_i' = g_i + \sum u_j h_i^j$, где h_i^j голоморфны, а u достаточно малы, для того чтобы идеал функций g_i' имел только k нулей в U. Тогда пространство $\mathbb{R}$ остается дополнением идеала $g_i'(u)$, и в $\mathbb{R}$ имеется оператор проектирования $f \to p_u(f)$, который также является голоморфным по u. Мы увидим, что если ввести u в качестве новых координат, то алгебра формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[z,u]]$, фрактальная относительно идеала $g_i'(u)$, представляет собой $\mathbb{C}[[u]]$, свободный модуль конечного типа, образующими которого служат $b_1, b_2, \dots b_k$.

3.1.4. Дифференциальная подготовительная теорема

На этот раз рассмотрим многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами, и пусть $I(p)$ будет идеалом, порожденным многочленом P на алгебре $\mathcal{E}$ функций на $\mathbb{R}$. Сразу ясно, что коразмерность $I(p)$ в $\mathcal{E}$ зависит от числа вещественных корней многочлена $P(x)$. Например, идеал, порожденный многочленом (x^2-1), имеет коразмерность два, тогда как идеал, порожденный многочленом (x^2+1), имеет нулевую коразмерность, поскольку любая функция C^∞ в $\mathcal{E}$ кратна функции (x^2+1), нигде не равной нулю. Если интересующий нас порождающий многочлен имеет степень k:

$$P(x) = x^k + \sum_{j=0}^{k-1} u_j x^j,$$

то максимальная коразмерность идеала $I(p)$ равна k тогда, когда все корни вещественны. Его коразмерность будет строго меньше, если некоторые корни будут комплексно-сопряженными. Оператор проектирования p_u определяется интерполяционным многочленом Лагранжа на множестве таких (u), где все корни вещественны. Дифференциальная подготовительная теорема состоит в том, что этот оператор проектирования, дифференцируемый по (u), можно продолжить на всю окрестность начала координат в пространстве u.

Здесь речь идет о глубоком результате, который вызывает интерес лучших аналитиков. После его первого доказательства Б. Мальгранжем (семинар Картана, 1961 г.) последовало доказательство-обсуждение Дж. Мазера, затем — еще одно С. Лоясевича, и еще одно — Л. Ниренберга [TPD]. Здесь мы ограничимся описанием природы встретившихся трудностей.

Если вернуться к примеру, приведенному в предыдущем параграфе, примеру с интерполяционным многочленом, имеющим два корня c, c':

$$x.\frac{f(c)-f(c')}{c-c'} + \frac{c'f(c)-cf(c')}{c'-c},$$

то после выполнения деления он примет вид $f_1(c,c')x + f_2(c,c')$, где многочлены f_1 и f_2 симметричны. Тогда остается убедиться, что f_1 и f_2 суть функции C^∞ симметричных элементарных функций, $s = c + c'$, $p = cc'$. Это утверждение «дифференциальной теоремы Ньютона», доказанной Дж. Глезером раньше подготовительной теоремы, которая, как это демонстрирует доказательство Лоясевича, практически эквивалентна ей.

Существенным инструментом доказательства служит аналитическое продолжение функции класса C^∞. Погрузим $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ одновременно и для исходного, и для конечного множества. С помощью теоремы о продолжении Уитни можно показать, что любая функция класса C^∞ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ может быть продолжена до функции F: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, струя которой на вещественной части $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ совпадает со струей f, причем $F(x - iy) = F(x + iy)$. Очевидно, F не может удовлетворять условиям Коши–Римана в окрестности вещественной оси $y = 0$, если f не является аналитической. Следовательно, если определить остаток $p_u(f)$ через интерполяционный многочленом Лагранжа, примененный к продолжению F, необходимо быть готовым к отсутствию непрерывности на стратах комплексных кратных корней, поскольку частное вида $F(c) - F(c')/(c - c')$ не имеет предела для c, c', стремящихся к одной и той же величине. Это затруднение можно преодолеть, либо совершая подходящий переход к трубчатой окрестности страта кратных корней (метод Мальгранжа), либо выбирая такое явное продолжение, задаваемое преобразованием Фурье (метод Мазера), чтобы получившиеся разрывы компенсировались, если действия совершаются одновременно в сопряженных точках...

Теорема обобщается на случай функций нескольких переменных и принимает следующий вид, который нам в дальнейшем понадобится. Пусть

$$f : (\mathbb{R}^n_x, 0) \to (\mathbb{R}^n_y, 0)$$

будет дифференцируемым ростком отображения.

Мы предполагаем, что это отображение относится к *конечному типу*, т.е. фактор-пространства алгебры формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[x_i]]$ в $\mathbb{R}^n$ по идеалу, порожденному $y \circ f$ (взятыми формально), есть конечномерная R-алгебра, базой k которой служат образующие $b_1, b_2, \ldots b_k$ (многочлены по степеням x). Пусть

$$f : (\mathbb{R}_n, 0) \times (U, 0) \to \mathbb{R}_n \times (U, 0)$$

является разверткой ростка f. Тогда, как говорилось выше, фактор-алгебра $\mathbb{R}[[x,u]]/y \circ F$ в формальных степенных рядах есть $\mathbb{R}[[u]]$, свободный модуль, и $b_1, b_2, \ldots b_k$ суть его образующие. Тогда подготовительная теорема гласит: *алгебра $\mathcal{E}(x,u)$ дифференцируемых ростков на $(\mathbb{R}^n, 0) \times (U, 0)$, факторизованная относительно идеала, порожденного $y \circ F$, есть свободный $\mathcal{E}_U$-модуль, имеющий $b_1, b_2, \ldots b_k$* в качестве образующих (см. Ж. К. Тужерон, с. 192)[пр6].

Из этого следует существование оператора проектирования p_u, который отображает любой росток $f(x,u)$ на такую линейную комбинацию вида $\sum_j a_j(u) \cdot b_j$, что

$$f(x,u) \equiv p_u(f) \mod (y_j \circ F(x,u)).$$

В итоге существование этого оператора проектирования p_u определяет остаток от деления f на идеал $[(y_j \circ F(x,u))]$. Теперь необходимо заняться «частным» этого деления, т. е. тем, во что оно превращается, когда мы имеем дело с идеалом, а не с единственным многочленом.

3.1.5. Теорема о линейных системах, зависящих от параметра

Рассмотрим линейную систему вида

$$\sum_i a_j^i(t) x_i = c_j(t), \tag{S}$$

где коэффициенты a_j^i и c_j являются дифференцируемыми функциями многомерного параметра $t \in T$. Предположим, что для любого значения t вектор $c_j(t)$ находится в образе линейного отображения, определяемого матрицей $a_j^i(t)$: для любого t существует, по меньшей мере, один вектор $x_i(t)$, являющийся решением системы (S). Можно ли утверждать, что существует глобальное решение $x_i(t)$, дифференцируемое по t?

В классическом случае можно утверждать существование такого решения, только если матрицы $a_j^i(t)$ имеют постоянный ранг относительно t, поскольку тогда ядра отображений a_j^i, все имеющие одну и ту же размерность, определяют векторное расслоение над пространством T параметров t. Но есть и другой случай, более общий, который мы и рассмотрим подробнее.

В пространстве M матриц (a_j^i) имеется подпространство F матриц ранга, меньшего чем максимальный. Это многообразие F допускает стратификацию, определенную рангом. Так как в действительности его страты являются здесь орбитами действия групп (автоморфизмов исходного и конечного векторных пространств), то эти страты обладают замечательными свойствами, позволяющими осуществить их локальное соединение: любое векторное поле X, определенное на страте A, продолжается на окружающее пространство в виде поля X, касательного к стратам звезды A. (см. Ж. Мартине).

Это такая линейная система, что (S) полностью определяется отображением $g\colon T \to M$, которое любому $t \in T$ сопоставляет матрицу $a^i_j(t)$. Тогда теорема гласит:

Если отображение $g\colon T \to M$ трансверсально на многообразии F сингулярных матриц, то существует глобальное решение $x_i(t)$, дифференцируемое по t.

Эта теорема была доказана Мальгранжем и Мазером. Докажем ее для случая, когда a^i_j является квадратной матрицей (n, n).

После умножения на алгебраические дополнения A^k_j, приходим к диагонализированной системе: $\sum a^i_j A^i_k x_i = c_j A^j_i = B_i(t)$. Функция $B_i(t)$ равна нулю на многообразии Δ^i, определенном посредством равенства $\Delta(t) = 0$. Следовательно, достаточно доказать, что можно разделить $B_i(t)$ на $\Delta(t)$.

Определение 7. Будем говорить, что числовая функция $A(x)$ имеет *свойство нулей*, если любая функция $f(x)$, обращающаяся в нуль на $A^{-1}(0)$, кратна $A(x)$ в алгебре дифффеpенцируемых функций. С помощью «спектральной» теоремы Уитни можно установить, что многочлен $P(x)$, локально *неприводимый*, имеет свойство нулей, если *множество гладких точек* (где $P \equiv 0$) является *плотным* в $A^{-1}(0)$. (См.: Мальгранж [ID][пр7].)

Итак, многочлен $\Delta(a^i_j)$ в качестве многочлена в пространстве квадратных матриц M действительно обладает этими двумя свойствами. Он неприводим; в самом деле, после перехода в комплексную область множество гладких точек из $\Delta = 0$ является связным, поскольку две матрицы максимального ранга $n - 1$ могут быть преобразованы одна в другую с помощью замены координат на исходном и конечном множестве. С другой стороны, множество гладких точек вещественного многообразия $\Delta = 0$ является плотным, поскольку любая сингулярная матрица приближается матрицей ранга $(n - 1)$.

Следовательно, остается доказать, что если $\Delta(a^i_j)$ имеет свойство нулей, то индуцированная функция $\Delta \circ g$ также имеет это свойство, если g трансверсально на $\Delta = 0$. Если предположить (а это всегда возможно), что g погружено в M, то достаточно показать, что любая функция f, определенная на образе g и равна, нулю на $\Delta \cap \operatorname{Im} g$, продолжается (локально) до функции F, обращающейся в нуль на $\Delta^{-1} = 0$. Для того чтобы построить F исходя из f, можно было бы использовать векторное поле X, трансверсальное к образу g и касательное к стратификации $\Delta^{-1}_{(0)}$, поле, которое, как было сказано, всегда существует. Затем мы ограничим разложение $F = \Delta.Q$ на g.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это свойство дифференцируемых функций продолжаться от трансверсального сечения до окружающего пространства является, очевидно, общим, если принять гипотезу о том, что стратификация является полуаналитической и обладает свойствами Уитни. Однако, на мой взгляд, это не было установлено[пр8].

3.1.6. Критические точки функций[пр9]

Приняв эту теорему о линейных трансверсальных системах, остается только применить ее к нашей ситуации критических точек функций.

Пусть $f(x_i)$ — росток дифференцируемой функции в начале координат пространства $\mathbb{R}^n$, имеющий в нуле *алгебраически изолированную* особую точку. Здесь мы имеем в виду, что фактор-алгебра $R[[x_i]]/($идеал, порожденный $f_{xi})$ конечномерна. Пусть $1, b_1, b_2, \dots b_k$ — база этой R-алгебры, образованной многочленами. Тогда имеется

Теорема 1. *Выражение*

$$F(x,u) = f(x_i) + \sum_{j=1}^{k} u_j b_j$$

является универсальной разверткой ростка $f(x_i)$.

Сначала рассмотрим деформацию, т.е. развертку размерности один: $f(x,t)$. Предположим, что нам удалось определить функцию g: $t \to u_i$ до значения $t_0 > 0$ и диффеоморфизмы h_t, h'_t исходного и конечного множества (здесь h'_t — это перенос $y \to y + a(t)$) такие, что

$$f(x,t) = F[h_t(x), g(t)] + x(t).$$

Дифференцируя это соотношение по t получаем:

$$df/dt(x,t) = \sum_i F_{x_i}[h_t(x); g(t)] \frac{dh_t^i}{dt}(x) + F_u g'(t) + da/dt.$$

Функция $df/dt(x,t)$ задана деформацией. Осуществим замену переменных для ее аргумента $x \xrightarrow{h_t} x_1$; зафиксировав t в точке t_0, положим

$$A(x_1) = df/dt(h_{t_0}^{-1}(x_1); t_0).$$

Чтобы применить подготовительную теорему, рассмотрим вспомогательное отображение

$$G : (\mathbb{R}^n, 0) \times (\mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0) \times (\mathbb{R}^k, 0),$$

$$(x, u) \to (y, u),$$

определенное посредством соотношения

$$y_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=0}^{k} u_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i}.$$

Это отображение G относится к конечному типу, поскольку на формальных степенных рядах в нуле фактор-пространства $\mathbb{R}[[x]]/J(fx_i)$ есть векторное пространство над $\mathbb{R}$, имеющее в качестве базы $1, b_1, b_2, \ldots b_k$, а $\mathbb{R}[[x, u]]/J(F^u x_i)$ есть свободный $\mathbb{R}[[u]]$-модуль, имеющий в качестве базы те же самые элементы $1, b_1, b_2, \ldots b_k$. Из этого следует, что любая функция $A(x; u)$ может быть записана так:

$$A(x; u) = \sum_i F^u_{x_i} Q_i + p_u(A),$$

где «остаток» $p_u(A)$ записывается в следующем виде:

$$p_u(A(x; u)) = \sum_j a_j(u_j) b_j(x) + c(A)(u),$$

где $c(A)$ — скалярный коэффициент функции 1 из базы.

С другой стороны, линейная система

$$\sum_i F^u_{x_i} Q_i(x; u) = A(x) - p_u(A),$$

рассматриваемая как линейная система с неизвестными Q_i и параметрами (x, u), является трансверсальной линейной системой.

В самом деле, отображение $(x, u) \to (F^u_x; u)$, которое является не чем иным, как нашим недавним отображением G, трансверсально на многообразии линейных нулевых отображений, определенном соотношением $F^u_{xi} = 0$. (Для этого достаточно заметить, что если разложение f в ряд Тейлора начинается с члена третьей степени, что, как мы увидим, является единственным интересным случаем, то b_j содержат координаты $(x_1, x_2 \dots x_n)$. Из этого следует, в частности, что многообразие, определенное в (x, u) посредством соотношения $F^u_{xi} = 0$, является гладким и его размерность равна k.)

Из трансверсального характера этой линейной системы вытекает существование операторов $Q_i(A)$, непрерывных по A, с такими значениями в $\mathcal{E}(x, u)$, что

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} F^u_{x_i} Q_i(A)(x; u) + p_u(A).$$

С учетом этого вернемся к нашей функции $A(x_1)$, определенной исходя из df/dt с помощью преобразования h_t^{-1}. Выразим ее в виде

$$A(x_1; u) = \sum_{i=1}^{n} F^u_{x_i} Q_i(A)(x_1; u) + a_0(u) + \sum_{j=1}^{k} a_j(u) b_j(x_1).$$

Так как $x_1 = h_t(x)$, то для определения h_t и g_t необходимо в итоге решить системы *обыкновенных* дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} dh^i_t/dt &= Q_i(A(x, g))(h_t(x); g_t(u)), \\ dg_i/dt &= a_i(A(x; g)), \\ da/dt &= a_0(A; g_j(t)) = a_0[A(x; g)](t). \end{aligned}$$

Интегрирование этой системы позволяет посредством интегрирования восстановить, реконструировать $h^i_j(x)$, $g_i(x)$ и перенос $a(u)$, для того чтобы воздействовать на конечное пространство.

Когда пространство параметров T является многомерным, необходимо рассмотреть семейство деформаций f_t, зависящих от новых параметров v. Тогда используется та же самая подготовительная теорема, в которой с целью завершения интегрирования к параметрам u добавляются параметры v.

Единственность универсальной развертки[пр10].

Лемма 1. *Пусть $F(x, u) = f(x) + \sum_i u_i b_i(x)$ есть универсальная развертка ростка $f(x)$. Предположим, что существует такой эндоморфизм j, отображающий $(U, 0)$ на себя, $u_i = \varphi^i(v_j)$, что развертка, индуцированная эндоморфизмом φ, сама является версальной. Тогда φ есть локальный диффеоморфизм $(U, 0)$ на себя:*[пр11]

$$g(x; v) = f(x) + \sum_i \varphi_i(v_j) b_i(x).$$

Предположим, что отображение φ не имеет максимального ранга k в нуле. Тогда в фактор-алгебре

$$R[(x;v)]/\text{Идеал}(\partial G/\partial x),$$

по меньшей мере, одно направление пространства b_i не находится в образе $j^1\varphi$ в нуле. Деформируя $f(x)$ вдоль этого направления, мы не сможем выразить производный вектор как линейную комбинацию $\varphi(v).b_i$. Это означает, что G не может быть версальной разверткой.

Если две развертки с параметрами U и V являются «версальными» и размерность каждой из них равна k, то они эквивалентны. В самом деле, тогда существуют отображения s: $U \to V$, t: $V \to U$, индуцирующие на U (соответственно на V) развертки, эквивалентные развертке, изначально заданной на U (соответственно на V). Следовательно, можно применить предшествующую лемму к композициям отображений $t \circ s$, $s \circ t$, и это доказывает, что s, t суть локальные диффеоморфизмы.

3.1.7. Остаточная особенность

В предыдущем параграфе мы постулировали, что разложение $f(x)$ в ряд Тейлора в нуле начинается, по меньшей мере, с членов третьей степени. Если это не так, то ряд Тейлора содержит квадратичную форму $q(x)$ ранга $0 < k \leqslant n$.

Определение 8. Локальное расслоение p: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ называется *приспособленным* к ростку $f(x)$, если ограничение f на слой $F_0 = p^{-1}(p(0))$ допускает в нуле невырожденную критическую квадратичную точку.

Ясно, что максимум размерности приспособленного расслоения равен рангу k квадратичной формы $q(x)$. Любое приспособленное расслоение, рассматриваемое далее, будет всегда иметь максимальную размерность.

Если $f(x)$ представляет на слое $p^{-1}(0)$ (где $p(0) = 0$) критическую точку, невырожденную в нуле, то отсюда по теореме о неявных функциях следует то же самое и относительно любого близкого слоя $p^{-1}(a)$, где a достаточно мало. Множество этих критических точек, решение системы дифференциальных уравнений максимального ранга, имеющих вид $\partial f/\partial x = 0$, является подмногообразием W^{n-k} размерности $(n-k)$, трансверсальным к расслоению $p(x,y) \to y$.

В соответствии с теоремой М. Морса о невырожденных критических точках можно осуществить такое преобразование координат $x \to x'$ (зависящее от y дифференцируемым образом), что если $c(y)$ обозначает критическую точку

$$c(y) = W \cap p^{-1}(y),$$

то

$$f(x, y) = q(x) + f(c(y)).$$

Функцию $g(y) = f(c(y))$ назовем *остаточной особенностью* функции $f(x)$. Разложение в ряд Тейлора функции $g(y)$ начинается с члена третьего порядка. В самом деле, если бы это было не так, то можно было бы прибавить к $q(x)$ квадратичный член линейной функции (y_i), не зависящий от x, и форма $q(x)$ имела бы ранг не k, а $(k+1)$.

Сейчас мы установим, что остаточная особенность функции $f(x)$ корректно определена с точностью до эквивалентности.

Рассмотрим другое расслоение, приспособленное к особенности $f(x)$: оно задается системой уравнений вида:

$$y_j - h_j(x_j) = \text{const}.$$

С ним связано новое многообразие W', место критических точек ограничений f на слои $y - h(x) = \text{const}$.

Вследствие этого W' определяется системой уравнений $0 = \partial f/\partial x$, где $f(x) = x^2 + g(y)$, а y заменяется функцией от x с помощью формулы $y_i = h_i + \text{const}$. Тогда уравнение запишется так:

$$-2x = \sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial x}, \qquad \text{(W')}$$

и новая остаточная особенность определяется следующим образом:

$$g_1(y) = f(c_1(y)) = g(y) + 1/4 \sum \partial g/\partial y \cdot \partial h/\partial x)^2.$$

Вследствие этого, от $g(y)$ мы переходим к новой остаточной особенности путем прибавления к ней функции

$$G(y) = 1/4 g(y)^2 \cdot (\partial h/\partial x)^2,$$

которая, когда x заменяется функцией от y путем разрешения относительно x уравнения (W'), является элементом квадрата идеала частных производных $\partial g/\partial y$. Итак, мы пришли к теореме Ж. К. Тужерона (с. 57, теорема 3.2.)[пр12].

Теорема 2 (См: Ж. К. Тужерон, с. 57, теорема 3.2). *Пусть* $f(x_\imath)$ *является такой функцией, что*

$$f(0) = f'_x(0) = f''_{x^2}(0) = 0.$$

Если $G(x)$ находится в квадрате идеала J, порожденного на (x) функциями f'_x, то существует такой локальный диффеоморфизм[пр13] h: $x \to x$, что $f(x) + G(x) = f(h(x))$.

Доказательство. Рассмотрим деформацию $f(x)+tG(x)$. Поскольку идеал (J_t) частных производных $f + tG$ таков же, как и $J = J_0$, то бесконечно малую деформацию $f + tG$, $d/dt(f + tG) = G(x)$ можно выразить в виде

$$G(x) = \sum_i \frac{\partial(f + tG)}{\partial x_i} X_i(x;t).$$

Следовательно, эта деформация компенсируется бесконечно малой деформацией исходного множества (определяемой посредством X_i). После интегрирования по t получаем теорему 2.

Из понятия остаточной особенности вытекает, что два ростка $f(x)$ и $f_1(x)$, которые имеют одну и ту же остаточную особенность, имеют одну и ту же универсальную развертку и отличаются друг от друга только квадратичными членами, не имеющими значения для топологической природы особенности.

Следовательно, эти особенности имеют два важных числовых инварианта: *коранг* $(n - k)$, который представляет собой число переменных, фигурирующих в остаточной особенности, и *коразмерность*, которая представляет собой размерность (уменьшенную на единицу) универсальной развертки.

3.1.8. Особенности коразмерности меньше четырех

В пространстве $Q(n)$ квадратичных форм с n переменными квадратичные формы коранга p образуют подмногообразие коразмерности $p(p+1)/2$, равной числу коэффициентов квадратичной формы с p переменными. Из этого следует, что при наличии более чем четырех степеней свободы в качестве устойчивых (трансверсальных) можно получить только критические точки коранга один или два, тогда как точки коранга три будут иметь коразмерность шесть. Тогда список особых точек коразмерности, самое большее четыре, будет иметь следующий вид.

1. *Коранг один.* Полагая x в качестве соответствующей внутренней переменной, получим следующие особые точки:

$V = x^2$ — нулевая коразмерность; простой минимум (устойчивый).
$V = x^3$ — развертка $V = x^3 + ux$ (коразмерность один). *Складка.*
$V = x^4$ — развертка $V = x^4 + ux^2 + vx$ (коразмерность два). *Сборка.*
$V = x^5$ — развертка $V = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$ (коразмерность три). *Ласточкин хвост.*
$V = x^6$ — развертка $V = x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$ (коразмерность четыре). *Бабочка.*

2. *Коранг два.* Разложение $f(x)$ в ряд Тейлора начинается с кубической формы двух переменных (x, y), обозначаемой как $H(x, y)$. Линейный пучок $H_x(x, y) + kH_y(x, y)$ определяет инволюцию проективной прямой, которая в общем случае не вырождена.

Сначала предположим, что двойные точки этой инволюции различны и вещественны, например, $x = 0$, $y = 0$, тогда $H = x^3 + y^3$. Эту особенность, универсальная развертка которой имеет вид

$$V = x^3 + y^3 + wxy - ux - vy,$$

назовем *гиперболической омбилической точкой.*

Если двойные точки инволюции различны и комплексно сопряжены (например, циклические точки: $x^2 + y^2 = 0$), то соответствующая кубическая форма такова:

$$H = x^3 - 3xy^2,$$

поскольку $(x^2 - y^2 + kxy)$ имеют в качестве двойных точек $x^2 + y^2$ (так как две пары $x^2 - y^2$ и xy прямоугольны). Здесь речь идет об *эллиптической омбилической точке.*

Предположим, наконец, что двойные точки совпадают в точке $x = 0$. Это означает, что инволюция содержит неподвижную точку $x = 0$, и, следовательно, мы положим $H_x = 2xy$ и $H_y = x^2$, откуда $H = x^2y$. Но для функции x^2y начало координат не является изолированной особой точкой.

Чтобы изолировать ее, необходимо добавить к H член четвертой степени, не делящийся на x, например

$$V = x^2y + y^4.$$

Можно показать, что два произвольных члена четвертой степени, не делящиеся на x, приводят к двум эквивалентным особенностям (Т. Лю).

Тип особенности, определенный таким образом, промежуточный по отношению к эллиптической и гиперболической омбиликам, называется *параболической омбилической точкой.*

Мы изучим катастрофы, соответствующие этим особенностям (*элементарные катастрофы*), в следующей главе.

3.1.9. Стратификация функционального пространства функций

Пусть M^n будет дифференцируемым компактным многообразием, а $L(M)$ — пространством вещественнозначных функций C^∞ над M.

Будем говорить, что функция относится к *конечному особенному типу* («кот» по терминологии Дж. Мазера), если она содержит лишь некоторое (конечное) число особых точек, которые *все являются алгебраически изолированными.*

Функции «кот» образуют множество, всюду плотное в $L(M)$, дополнение к которому имеет бесконечную коразмерность. Более того, это множество снабжено стратификацией. В этом множестве определим между ростками алгебраически изолированных функций отношение эквивалентности: два ростка g, g' будут называться *«эквисингулярными»*, если каждый из них лежит в универсальной развертке другого.

Тогда имеется

Теорема 3. *Множество эквисингулярных ростков данного ростка g образует гладкое подмногообразие в универсальной развертке роста g.*

В произведении $R^n \times U$, которое представляет собой глобальное пространство универсальной развертки функции $f(x)$, рассмотрим алгебраическое множество A критических точек (по x) функций

$$F(x;u) = f(x) + \sum_j u_j b_j(x).$$

(В действительности можно предположить, что $f(x)$ — многочлен, так как идеал f_{x_i} имеет мощность[пр14] максимального идеала m. Тогда посредством преобразования координат можно, согласно теореме 2, в разложении в ряд Тейлора заставить исчезнуть все члены, степень которых больше $2m$.)

Согласно самому определению универсальной развертки, любая точка a допускает в $\mathbb{R}^n \times U$ окрестность, которая является «версальной» разверткой ростка функции $F(x;u(x))$ в точке a. Но всякое алгебраическое множество, такое как A, может быть стратифицировано таким образом, чтобы две точки одного и того же страта имели «изоморфные» окрестности относительно гомеоморфизма, совместимого со стратификацией. Это означает[пр15], что алгебраическое множество определяет *морфологию конечного типа*, «элементарные креоды» которой заданы локальными алгебраическими моделями $M_1, M_2, \ldots M_k$, так что каждая модель соответствует одному страту. Между этими морфогенетическими полями имеется отношение вложения: $M_i \subset M_j$, если и только если к страту X_j с центром M_j присоединен страт X_i с центром M_i. Итак, условия $M_j \subset M_j$ и $M_i \subset M_j$ могут выполняться только при условии, что M_i и M_j идентичны (все дело в том, что если $M_j \subset M_i$, то $\dim X_j \leqslant \dim X_i$). Следовательно, если g' содержится в универсальной развертке ростка g в U, то вокруг соответствующей точки в $(\mathbb{R}^n \times U)$ существует окрестность, являющаяся версальной разверткой ростка g'. По причине своей размерности эта окрестность также является универсальной, так что локальная модель множества A в g' является подмоделью модели, определенной посредством A в нуле. Но имеется и обратное отношение: модель ростка g является подмоделью модели g'. Следовательно, g и g' находятся на одном и том же страте.

С другой стороны, можно предположить, что локальные модели M_j были определены таким образом, чтобы учесть положение страт множества A по отношению к проекции $(\mathbb{R}^n \times U) \to^q U$: q, имеющими максимальный ранг на каждом страте (т. е. имеет место локальное погружение). Это означает, что тогда страт эквисингулярных ростков для f проецируется на пространство множеств U с помощью погружения — и, следовательно, локального погружения.

Тогда стратификация полуалгебраического множества проекции $q(A) \subset U$ служит определением локальной стратификации функционального пространства L в окрестности ростка f. В самом деле, каждой функции g из окрестности f в L можно поставить в соответствие эквивалентный росток $F_u(x)$, где u является непрерывной функцией $k(g)$. Отображение k: $W \to U$, определенное таким образом, является дифференцируемым сюръективным отображением максимального ранга. Таким образом, мы получаем прообраз стратификации по k минимальной стратификации U, содержащей $q(A)$ в качестве стратифицированного подмножества.

Поскольку любая функция из L содержит только конечное число критических точек, мы можем получить только конечное число локальных стратификаций конечной коразмерности, проходящих через некоторую точку из L (стратификации, которые по причине их определения срастаются в пересечении двух карт пространства L). Затем эта стратификация дополняется с учетом кратных критических значений. Если c — критическая точка типа эквисингулярности (g), а c' — другая точка типа (g'), то функции, одновременно представляющие c и c', образуют в L страт X_g, g', который является пересечением X_g и $X_{g'}$. В X_g, g' можно ввести в качестве подстрата множество $Y \subset X_g$, g' таких функций f, что $f(c) = f(c')$. То же справедливо и для кратных критических значений произвольной кратности (не следует забывать, что для конструирования этой стратификации используются *невырожденные* критические точки). Таким образом оказывается завершенной стратификация пространства L. (Очевидно, следовало бы доказать, что эта последняя конструкция действительно дает место стратификации, и это доказывается с помощью такого инструмента, как «мультиструя» Мазера.)

Замечание 1. Предложенное здесь понятие эквисингулярности является более точным, чем то, которое обычно рассматривается в алгебраической геометрии. В самом деле, оно вместе с локальными топологическими свойствами ростка вводит свойства его универсальной развертки[пр16].

Замечание 2. Можно было бы попытаться ввести в пространстве $R^n \times U$ алгебраическую стратификацию, определенную размерностью $\mathbb{R}$-фактор-алгебры[пр17]. $\mathbb{R}[[x]]/$ 0Идеал f^x_{ui} в каждой критической точке. Эта стратификация, возможно, менее точна, чем стратификация, определенная с помощью A. Например, можно предположить, что множество точек (x, u), где эта фактор-алгебра имеет данный ранг, есть гладкое множество, но совокупность этих гладких множеств не удовлетворяет условиям (A, B) Уитни.

Пусть в пространстве $L(V; \mathbb{R})$ действует группа $\operatorname{Diff} V^n$ диффеоморфизмов области определения и группа диффеоморфизмов на области значений R посредством композиции с $f\colon V \to \mathbb{R}$.

Такое действие совместимо со стратификацией, определенной выше. На всех стратах коразмерности < 7 группа действует транзитивно. Но, начиная с квадратичной особенности $V = x^4 - y^4$, появляются непрерывные инварианты, модули (например, двойное отношение четырех прямых). Этот страт имеет коразмерность 7. (Сказанное справедливо для особенностей коранга два, тогда как для особенностей коранга три плоская кривая третьего порядка, соответствующая уравнению $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, уже имеет проективный инвариант, инвариант Вейерштрасса, и такой страт также имеет коразмерность 7.)

В интересующей нас ситуации, когда базовое пространство имеет размерность, самое большее четыре, все страты, встречающиеся трансверсально, имеют локальные дифференцируемые тривиализации, обязанные своим существованием действию группы. (Векторное поле на некотором страте продолжается до окружающего пространства способом, совместимым со стратификацией.) Из этого следует, что относительно отображений, которые в креоде определяют множество катастрофы как прообраз стандартного полуалгебраического множества, можно предполагать глобальную дифференцируемость.

3.1.10. Универсальная развертка ростка отображения

Пусть росток отображения

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

задан равенством $y \circ f = f_j(x_i)$. Пусть M_y^p есть свободный p-модуль с p образующими над $\mathbb{R}[[x_i]]$.

Отображение Якоби в нуле, взятое формально, определяет линейное отображение свободного n-модуля $X_i(x)$ над $\mathbb{R}[[x_i]]$ в M_y^p. Если образ этого отображения в M_y^p имеет конечную коразмерность, предшествующую теорию можно обобщить на случай ростков отображений. Очевидно, это условие конечной коразмерности уже не выполняется «почти всегда», как это было в случае функций. Из этого следует, что алгебраическая теория универсальной развертки применительно к отображениям требует слишком многого, и ее следует заменить *топологической* теорией универсальной развертки.

3.2. Стратифицированные пространства и морфизмы: топологическая теория

3.2.1. Стратифицированные множества

Если V — многообразие[пр18], собственно погруженное в $\mathbb{R}^n$, то известно, что почти любое дифференцируемое отображение

$$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$$

трансверсально над V, и прообраз $W(f) = f^{-1}(V)$ является подмногообразием коразмерности q в $\mathbb{R}^k$. Более того, если g — отображение, достаточно близкое к f в C^1-топологии, то многообразия прообразов $W(f)$ и $W(g)$ являются изотопными в изотопии пространства $\mathbb{R}^k$, совместимой с деформацией F_t отображения f в g.

То же свойство почти сразу можно обобщить, если вместо многообразия V рассмотреть систему многообразий общего положения или, более обще, *многообразие углов*, дифференцируемым образом погруженное в $\mathbb{R}^n$.

Основной идеей теории стратифицированных множеств является установление аналогичного свойства для подмножества A из $\mathbb{R}^n$, которое является полуалгебраическим множеством или полуаналитическим компактом. Мы стараемся заключить множество A в параметрическое семейство регулярных окрестностей $T_r(A)$, которые все для достаточно малого r являются диффеоморфными многообразиями углов. При соответствующем определении трансверсальности, если $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ является трансверсальным над A, то f трансверсально над всеми многообразиями углов $T_r(A)$ для достаточно малых r. Тогда выполняется теорема изотопии для этих отображений $F_t\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, трансверсальных над $T_r(A)$. Единственная трудность, которая является действительно важной, состоит в доказательстве того, что эти изотопии могут соединяться с изотопией прообразов $F^{-1}t(A)$, когда r стремится к нулю.

Чтобы построить это семейство трубчатых окрестностей $T_r(A)$, разложим A на конечное объединение собственно погруженных многообразий X_i, на такие страты множества A, что если X_i примыкает к X_j, то в каждой точке x_0 из X_i выполняется условие (AB) Уитни: если $T_y(X_j)$ обозначает плоскость, касательную к X_i в в точке y, то для любой последовательности y_i, когда X стремится к x, и для любой последовательности x_i, стремящейся[пр19] к x_0,

$$\lim_{x_i;y_i\to x_0} \mathrm{Angle}(\overrightarrow{x_i y_i}),\, T_{y_i}(X_j) = 0.$$

Существование такого разложения было установлено Уитни для аффинных аналитических множеств, а Лоясевичем — для полуаналитических. Такое разложение, которое впредь мы будем называть *стратификацией*, имеет граничное свойство: если $X \cap \bar{Y} \neq \emptyset$, то $X \subset \bar{Y}$ и $\dim X < \dim Y$.

Обозначим эту ситуацию через $X < Y$ (X инцидентно Y). *Цепью* страт называется любая последовательность страт $X_1, X_2 \dots X_k$ такая, что $X_i < X_i + 1$. Тогда центральное свойство стратифицированных множеств таково: для каждого страта X можно определить семейство таких трубчатых окрестностей (в обычном смысле дифференциальной геометрии) $T_r(X)$, что крайние трубки $T_r(X_i)$ цепи страт X_i пересекаются трансверсально.

Тогда именно путем объединения этих трубок (беря радиусы r в виде $r = \varepsilon^s$, где s — размерность страта) X_s можно создать семейство глобальных трубчатых окрестностей множества A.

Можно найти [см. EMS. — *Прим. ред. франц. изд. 1968*, 8] достаточно полную — хотя и трудную для чтения — версию теории стратифицированных множеств. Впоследствии Дж. Мазер дал полную версию этой теории в [LTS]. Существует чисто формальная теория стратифицированных множеств [SMA], [LM][пр20]: если дана схема инцидентности множества, рассматриваемая как упорядоченный граф, то каждой цепи (c) страт $X_1 < \ldots < X_s$ сопоставляется граничное многообразие с углами $M(c)$ (при этом максимальная «коразмерность» угла является длиной цепи, т.е. числом страт, которые она содержит). Если c' — это подцепь цепи c, то задается сюръекция $k_{c/c'}$ многообразия $M(c)$ на многообразие $M(c')$. Эта сюръекция является дифференцируемым расслоением с локальными моделями, корректно определенными на углах краев области определения и области значений. На эти сюръекции накладываются очевидные условия транзитивности. Тогда глобально стратифицированное множество E получается как фактор-множество дизъюнктного объединения этих $M(c)$ с идентификациями, определенными этими сюръекциями[пр21].

3.2.2. Проекция стратифицированного множества. Стратифицированные морфизмы

Если теперь понятие стратифицированного множества может считаться окончательно установленным, то этого же еще нельзя сказать об общем понятии «стратифицированного морфизма». Сперва рассмотрим задачу проектирования на линейном отображении $p\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ стратифицированного множества A, погруженного в $\mathbb{R}^{n+k}$.

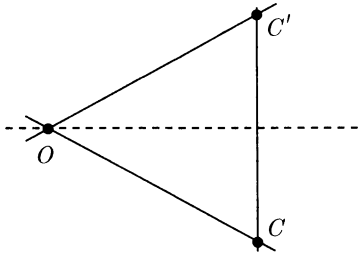
Предположим, что после возможного совершенствования стратификации множества A проекция p будет иметь на каждом страте постоянный ранг.

Тогда образ $X' = p(X)$ любого страта X множества A является многообразием, погруженным в пространство значений $\mathbb{R}^n$. Нетрудно увидеть, что наличие свойства (A) для последовательности двух стратов X, Y из A влечет за собой наличие этого же свойства для их проекций X', Y'. Зато это же отнюдь не справедливо относительно свойства (B), которое требует принятия дополнительной гипотезы.

Наконец, естественно требовать, чтобы пересечения многообразий (X') между собой (так же как и их самопересечения) обладали бы некоторым общим положением. Таким образом вводятся страты Y' на проекции $A = p(A)$, прообраз которой по p должен находиться на стратах множества A. Итак, мы оказываемся в ситуации, в которой можно было бы совершенно законно называть проекцию p множества A на его образ A' «стратифицированным морфизмом». Свойством этого морфизма является «локальная тривиальность» на любом страте области значений: прообраз $A \cap p^{-1}(X)$ страта X' области значений является расслоенным пространством над X', слой которого является стратифицированным множеством. (Это следует из свойства, описанного выше, свойства трансверсальных сечений стратифицированного множества.)

Однако введенное таким образом понятие не является достаточно точным. Можно было бы попытаться действовать следующим образом: если A является стратифицированным в $\mathbb{R}^n$, B — стратифицированным в $\mathbb{R}^p$, то $A \times B$ является стратифицированным в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, и проекция q: $A \times B \to B$ предоставляет локальную модель стратифицированного морфизма. Но это задает ситуацию чересчур строго, поскольку даже проекция угла COC' на его биссектрису не была бы локально стратифицирована[пр22].

Итак, если локально принять модель типа проекции произведения на множитель, это еще не означает, что мы должны допускать возможность сосредоточения некоторых страт одного множителя, когда мы размещаемся на другом.



В формальной теории стратифицированных множеств пространство A/K, полученное из стратифицированного множества A стягиванием в одну точку некоторого замкнутого (стратифицированного) подмножества из A, обозначаемого через K, будет стратифицированным множеством. Стратифицированную сюръекцию стратифицированного множества A на множество B можно в наиболее общем виде определить с помощью условия существования локальной модели, определенной некоторым произведением (или указанием на локальные связные составляющие, определенные углом). Наконец, именно эта конструкция служит для определения важного класса стратифицированных морфизмов, *пологих* морфизмов или морфизмов «без взрыва».

3.2.3. Морфизмы без взрыва

Пусть A стратифицировано в $\mathbb{R}^{n+k}$, p: $\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$, $A' = p(A)$ — образ множества A, также стратифицированный. Если $p|A$ является морфизмом без взрыва, то можно связать с каждым стратом X множества A трубку $T(X)$, полученную следующим образом. Рассмотрим образ X', полученный отображением X на A', и пусть $T(X')$ будет трубкой для X' в R^n. Тогда можно найти «вертикальную» трубку $V(X)$, достаточно близкую к X в такой точке сгущения $p^{-1}(p(x))$, что $T(X)$ будет «прямой суммой» $V(x)$ и трубки, полученной из $T(X')$ с помощью p. Более того, эти трубки подчиняются условиям трансверсального пересечения для страт некоторой цепи. С любой цепью c из A связана цепь из A', ее проекция. С многообразием углов $M(c')$ оказывается связанным прообраз по p, который является локальным произведением $M(c')$ на стратификацию, определенную с помощью многообразий углов ядра $\mathbb{R}^k$ проекции p.

При переходе от цепи c' к подцепи c'' имеется отображение соответствующих ядер $\mathbb{R}^k = \operatorname{Ker} p$, которое выражается через сюръекцию страт из $\operatorname{Ker}(c')$ на страты из $\operatorname{Ker}(c'')$.

Итак, отображение соглосования, определенное таким образом, принадлежит к тому типу отображений[пр23], которые получаются путем сосредоточения на одном страте одной из его трубчатых окрестностей. Точное определение может быть дано только на локальных моделях. Из этого, в частности, следует, что в отображении прилаживания «лоскута» из Y на X, где $X < Y$, ограничения, накладываемые на ядра k_{YX}: $\operatorname{Ker} p \,|\, Y \to \operatorname{Ker} p \,|\, X$, являются сюръективными.

Главное свойство этих морфизмов выражается во «второй» теореме изотопии:

Если $A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{t} R$таково, что p и $t \circ p$ — морфизмы без взрыва и a, b — две точки одного и того же страта из R, то морфизмы соответствующих сечений $A_a \to B_a$, $A_b \to B_b$ принадлежат к одному и тому же топологическому типу.

Дифференцируемые «обобщенные» отображения являются стратифицированными морфизмами без взрыва (см. об этом мою статью). [LM. — *Прим. ред. франц. изд.*, 1969, 3][пр24].

3.2.4. Стратификация пространства G ростков голоморфных отображений

Пусть f: $(N, 0) \to (P, 0_1)$ будет ростком голоморфного отображения $\mathbb{C}^n$ на $\mathbb{C}^p$. Пусть $S(f)$ будет критическим множеством ростка f. Если струя $j(f)$ в начале координат берется к внешней области некоторого множества K бесконечной коразмерности в $J\times(u,p)$, то морфизм $f|S(f)$ на его образ S' является конечным морфизмом. Следовательно, в силу теоремы Гроера (Grauert) множество S' является множеством, аналитическим в нулевой точке множества P. Обозначим через G_1 подмножество множества G, составленное из ростков, струя которых в нуле является внешней по отношению к K. Тогда то же самое свойство имеется у каждой точки $x\times N$, достаточно близкой к нулю для всех $g\times G_1$, что можно утверждать:

глобальное отображение

$F:(N\times G_1)\to P\times G$, определенное с помощью $(x,g)\to(g(x),g)$, $g\times G_1$,

равным образом является аналитическим морфизмом на окрестности множества $((0)\times\{G_1\})\cap S(f)$, который конечен. Следовательно, множество-образ $F|S(F)$ является аналитическим в окрестности множества $0\times G_1\cap P\times G_1$. В результате множества $S(F)$ и $F(S(F))$ могут быть стратифицированы в окрестности множества $0\times G_1$ (соответственно $0_1\times G_1$). По причине конечного характера морфизма F на $S(F)$ можно также «стратифицировать» F таким образом, чтобы сделать из него стратифицированный морфизм без взрыва. Тот факт, что пространство G_1 имеет бесконечную размерность, нисколько не уменьшает ни возможность применения к F теоремы *Гроера*, ни возможность локальной стратификации конечного аналитического морфизма на его критическом множестве.

Заменяя комплексную конструкцию вещественной, мы получаем те же свойства при условии введения для $S(F)$ и $F(S(F))$ стратификаций, полуаналитических в начале координат.

Более того, в обоих случаях F на $0_1\times G_1$ локально является стратифицированным морфизмом без взрыва. Создав пересечения и самопересечения стратов-образов, мы должны отобразить их прообразы по F на исходное пространство. Страты, введенные таким образом, разделяются на два типа: либо они образованы регулярными точками из $N\times G_1$, в случае чего коранг F равен $(n-p)$, и ядро $\operatorname{Ker} F$ является функцией, дифференцируемой и регулярной в точке $x\in N\times G_1$. Либо страт является критическим, и в этом случае он отображается на свой образ в $P\times G_1$ посредством локального диффеоморфизма. Но граничные страты критического страта тоже будут критическими, и условие сюръективности $k_{YX}\colon \operatorname{Ker}p\,|\,Y\to\operatorname{Ker}p\,|\,X$ проверяется тривиально.

Затем остается доказать, что стратификация, определенная таким образом на G_1, на самом деле является — если ограничиваться стратами конечной коразмерности в G_1 — стратификацией пространства струй $J^r(n,p)$[пр25].

Иначе говоря, если g является ростком G_1, принадлежащим к страту конечной коразмерности S, то любой росток g_1, который имеет с g достаточно высокого порядка касание, находится в S.

Я описал в [EMS] схему доказательства этой теоремы (которую я сформулировал в моей теореме 4 [LTP]). Позже Дж. Мазер дал доказательство, основанное на другом принципе[пр26].

Основные используемые свойства таковы:

1. *Обобщение теории символа Боардмана.*

Здесь речь идет о лемме 4A.1 из [EMS], которая, впрочем, в этой статье сформулирована неправильно.

Правильная формулировка такова:

пусть V — многообразие, погруженное в $J \times (n,p)$, каноническая проекция которого на $J^1(n,p)$ имеет коранг строго меньше $n - \mathrm{codim} V$ в нуле. Пусть

$$p : J^{r+1}(n,p) \to J \times (n,p)$$

— каноническая проекция. Тогда в прообразе $p^{-1}(V)$ существует такое правильное подмногообразие $s.V$ («символ» V), что любая струя $z \in p^{-1}(V) - s.\,V$ имеет следующее свойство: любая реализация f локальная относительно z такова, что $j^r f$ трансверсально на V в нуле и, более того, локальное ограничение f на многообразие прообраза $j^r(f)^{-1}(V)$ имеет максимальный ранг (локальное погружение).

2. *Лемма о множестве предельных положений плоскостей, касательных вдоль сечения аналитического множества дифференцируемым многообразием.* (Лемма 4A.3 из [EMS]).

Пусть A — росткок аналитического множества в $0 \in \mathbb{R}^n$, f — локальное погружение f: $(\mathbb{R}^k, 0)$ в $(\mathbb{R}^n, 0)$. Предположим, что f трансверсально на множестве A^1 гладких точек множества A и аналитично в нуле. Тогда множество предельных положений для $x \in f(R^k) \cap A$ плоскостей пересечений касательных плоскостей $T_x(f) \cap T_x(A_1)$ при $x \to 0$ является грассмановым полуалгебраическим множеством K, которое зависит только от струи (достаточно высокого порядка) функции f.

Эта лемма служит для доказательства того, что для множеств, определенных отклонением от локального ростка (f), свойства (A) и (B) Уитни определяются, в сущности, струей ростка (f), поскольку эти свойства определяются предельным множеством касательных плоскостей в гладких точках.

3. *Лемма о стабилизации самопересечений.*

Если V есть, как и прежде, росток многообразия, определенного отклонением от аналитического ростка f, то самопересечение образа $f(V)$ в области значений является полуаналитическим множеством, топологический тип которого (если f является погружением) целиком определяется струей ростка f (так же, как локальные уравнения и неравенства).

Эти леммы позволяют с помощью индукции по возрастанию размерности критических стратов из $S(f)$ доказать, что страты-образы зависят только от струи ростка f. Докажем это сперва для стратов минимальной размерности. $X_i = D_i(f)$, где D_i — некоторая система дифференциальных операторов, определенных посредством подмногообразия пространства струй $J^\infty(u, p)$ максимальной коразмерности. Тогда образ $f(X_i)$ является локальным погружением. Мы стабилизируем самопересечение $f(X_i) \cap f(X_i)$, так же как и его особенности, если они у него есть.

Пусть $T(f)$ является системой образующих для идеала, связанного с $f(X_i)$[пр27]. Согласно лемме 3, струя $T(f)$ зависит только от струи ростка f. Так как это самопересечение является единственной (комплексной) особенностью образа $f(X_i)$, то система (g) образующих идеала, связаного с $f(X_i)$, в области значений вблизи нуля удовлетворяет неравенству типа неравенства Лоясевича:

$$\sum |g_i|^2 + \sum |J^2(g_i)|^2 > C[T(f)]^a, \ C > 0, \ a > 0. \tag{e}$$

Здесь $J(g_i)$ суть якобиана порядка 1[пр28], равного коразмерности $f(X_i)$, полученной из уравнений для $D_i(f)$ с помощью повторного применения подготовительной теоремы и исключения координат из области определения. Это означает, что струя для g зависит только от струи для f.

Следовательно, если имеется неравенство типа (e) для f, то имеется такое же неравенство для любого ростка f_1 такого, что $f - f_1$ будет гладкой поверхностью (конечного) порядка, достаточно высокого в нуле.

То же неравенство будет иметь силу, если его применять рекурсивно, и для любого образа критического страта $X_j = D_j(f)$ при условии включения в правую часть неравенства (e) системы образующих образа-символа для D_j (если он уже не содержится в этом самопересечении).

Это рассуждение позволяет стабилизировать образы критических стратов. Рассуждение, аналогичное лемме 3 (более простое), позволяет стабилизировать точки сгущения $f^{-1}(f(D_i(f))$ критических стратов, так же как и их трансверсальные пересечения.

Полное доказательство можно найти в работе Гибсона: Gibson C. G. и др.[пр29].

3.2.5. Универсальная развертка ростка

Пусть f будет ростком, принадлежащим к страту конечной коразмерности q пространства ростков G_1. «Универсальной разверткой» ростка f называется глобальное отображение

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,$$

определенное ростком многообразия $\mathbb{R}^q$, трансверсального к страту из f в f.

Две универсальные развертки ростка f являются изоморфными в качестве стратифицированных морфизмов (без взрыва), поскольку этот изоморфизм совместим со стратифицированным гомеорфизмом пространства параметров $\mathbb{R}^q$.

Для двух ростков, принадлежащих к одному и тому же страту S из G_1, универсальные развертки изоморфны (в указанном выше смысле).

В частности, можно говорить об универсальной развертке струи, если только эта струя определяет страт из G_1 конечной коразмерности.

Замечание 1. Если росток (f) принадлежит к (G), т. е. если он таков, что f является конечным морфизмом на $S(f)$, то, согласно Дж. Мазеру [LTS][пр30], известно, что можно «стабилизировать» этот росток, т. е. найти k — параметрическое семейство $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$, которое структурно устойчиво в смысле дифференцируемой эквивалентности. Этот момент становится отправной точкой в доказательстве Дж. Мазером плотности структурно-устойчивых отображений. Но такое отображение F не является устойчивым перед лицом диффеоморфизмов, которые коммутируют с проекцией на пространство параметров $\mathbb{R}^k$. Это отображение не образует «универсальную развертку» в нашем смысле (по крайней мере, в общем случае). Таким образом, отображение $f : \overset{\mathbb{R}^2}{x,y} \to \overset{\mathbb{R}^2}{x,y}$, определенное[пр31] посредством $X = x^3$, $Y = y$, находится в G, и оно включено в глобально устойчивое семейство $X = x^3 + ux$, $Y = y$, $U = u$. Это последнее отображение не является универсальной разверткой для f, которая не существует (по крайней мере, в качестве семейства конечной размерности).

Замечание 2. Ростки, принадлежащие к двум различным стратам S_1, S_2 из G_1, могут принадлежать к одному и тому же (стратифицированному) топологическому типу. Тогда эти ростки отличаются друг от друга своими универсальными развертками. Пример этого феномена был приведен Ф. Фамом (F. Pham), Бриансоном (Brianson) и Спедером (Speder).

Литература[пр32]

[1] G. Glaeser. *Fonctions composees differentiables*, Ann. of Math. 77, 1, 1963, p. 193–209.

[2] C. G. Gibson et al. *Topological Stability of smooth mappings*, Springer Lecture Notes 552. — Berlin, 1976.

[3] S. Lojasiewicz. *Whitney fields and Malgrange – Mather preparation theorem*, Liverpool Singularities symposium, August 1970, Springer Lecture Notes 192, p. 106–115.

[4] Y. C. Lu. *Sufficiency of jets in Jn(2,1) via decomposition*, Inventiones Math. 10, 119–127 (1970).

[5] B. Malgrange [I.D.]. *Une remarque sur les ideaux defonctions differentiables*, Inventiones Math. 9, 4, 1970, p. 279–283.

[6] J. Martinet. *These, Les singularity des formes different ielles* (Ann. Institut Fourier, 1970).

[7] J. Mather [LTS]. *Lectures on topological stability.* — Haward University, 1970.

[8] J. Mather [SSM]. *Stability of* C^∞ *mappings* (I.-VI) (Publ. Math. IHES, en particulier).

[9] L. Nirenberg [TPD]. *A proof of the Malgrange Preparation theorem Liverpool Singularities symposium*, August 1970, Springer Lecture Notes 192, p. 97–105.

[10] R. Thorn [SMA]. *La structure locale des morphismes analytiques*, Congres International de Nice (1970) [n. e., 1970, 8].

[11] R. Thorn [EMS]. *Ensembles et morphismes stratifies* (Bull. Amer. Math. Soci., 1969), March, 75, 2, p. 240–284 [n. e., 1968, 7].

[12] R. Thom [LTP]. *Local Topological properties of differentiable mappings*. Differential analysis Bombay Colloquium 1964 [n. e., 1964, 1].

[13] R. Thom [LM]. *Stratified sets and Morphisms: Local Models*. Liverpool Singularities symposium. Springer Lecture Notes 192, p. 153–164 [n. e., 1969, 3].

[14] J. C. Tougeron. *Ideaux de fonctions differentiables*. Springer Verlag. — Berlin, 1972.

Примечания редактора

пр0 1971, 3, 3. Переиздано в качестве главы 3 в MMM1, 1974 г., с. 38-70, и в MMM2, 1980 г., с. 57–80, вместе с нижеследующей «шапкой».

«Шапка» (опубликована в 1980 г.).

Глава III имеет весьма технический характер и адресована читателям, желающим немного приобщиться к тайнам теории универсальной развертки и особенностей дифференцируемых отображений. Другие читатели могут ее пропустить без особого ущерба...

пр1 Исходя исключительно из соображений обеспечения качественного чтения мы будем использовать изложение этого текста в варианте 1980 г. Предшествующие версии не содержат общего заглавия и довольствуются разделением статьи на две большие части: «I. Теория универсальной развертки» и затем «II. Универсальная развертка 1. Топологическая теория», соответствующие в версии 1980 г. подзаголовкам «3.1. Универсальная развертка ростка функции» и «3.2. Стратифицированные пространства и морфизмы: топологическая теория». Впрочем, три версии 1971 г., 1974 г. и 1980 г. отличаются друг от друга очень мало. Все варианты последовательно отмечены в примечаниях редактора.

пр2 Список литературы 1971 г. ко всей статье помещен в конце текста (как и в оригинальном издании), в отдельных случаях он дополнен обозначениями в соответствии с правилами, принятыми в настоящем издании. Ссылки в MMM2 к этой главе приводятся ниже.

Фраза, указывающая на результаты Дж. Мазера, в издании 1971 г. и MMM1 выглядит иначе: «о которой практически ничего не известно».

пр3 Вместо фразы «которая используется в физике в теории нарушения симметрии» в издании 1971 г. и в MMM1 стоит «о которой практически ничего не известно».

пр4 Редакторы позволили себе привести оригинальную диаграмму в лучшее соответствие с принятыми обозначениями, заменив пары вертикальных стрелок Id и g одной стрелкой $Id \times g$.

пр5 Вместо «универсальной» следует читать «версальной».

пр6 Ссылка добавлена в MMM2.

пр7 Ссылки добавлены в MMM1 и MMM2.

пр8 Это примечание опущено в MMM2.

пр9 Этот подзаголовок стоит вместо заголовка «Универсальная развертка функции» в варианте 1971 г. В варианте 1974 г. подзаголовок опущен (видимо, это опечатка).

пр10 Этот заголовок в варианте 1971 г. трактовался как заголовок параграфа, но в 1974 г. это уже не так.

пр11 В издании 1971 г. и в MMM1 j заменено на k, и в издании 1971 г. есть две фразы, явно забытые в последующих вариантах: «В самом деле, для того чтобы отличить переменные друг от друга, положим $u = k(v)$. Тогда индуцированная развертка такова:»

пр12 Упоминание Ж. Тужерона появляется в варианте 1980 г.

пр13 Читателю следует заменить [редактору перевода: написание следующих формул следует уточнить! — *Перев.*] $x \mapsto x$ на h: $x \mapsto h(x)$.

пр14 Буква m используется для обозначения мощности максимального идеала, а не самого идеала.

пр15 В предшествующих вариантах имеется дополнение: «в смысле главы 1».

пр16 В предшествующих вариантах здесь делалась ссылка на Ф. Фама (F. Pham) [20].

пр17 В первом варианте стоит «$\mathbb{R}[[x]]/$Идеал (f_{xi})», что кажется более разумным (фиксированный параметр n подразумевается).

пр18 В первом варианте стоит: «Если V^{n-q} есть ...»

пр19 Следует читать: «то для любой последовательности $y_i \in X_j$, стремящейся к x_0, и для любой последовательности $x_i \in X_i$, стремящейся к x_0» (в варианте 1971 г.: (...) $y_i \in X_j$, стремящейся к x, и для любой последовательности x_i, стремящейся к x_0», в MMM1: «(...)y_i из X, стремящейся к x, и любой последовательности x_i, стремящейся к x»).

пр20 Нижеследующие три ссылки не фигурируют в варианте 1971 г. [LTS] и [SMA], [*прим. редактора франц. изд.*, 1970, 8]) фигурируют в MMM1 (каждая с опечаткой).

пр21 Ссылка «Том [LM, [*прим. ред. франц. изд.*, 1969, 3)]]» исчезла в MMM1 и MMM2.

пр22 Чертеж фигурирует только в варианте 1971 г.

пр23 В трех изданиях стоит «приспособлений».

пр24 В предыдущих двух вариантах вместо ссылки стоит: «такова главная мотивировка для введения этого понятия, корректного и полного представления которого, к сожалению, еще не существует ...»

[пр25]Следует читать (как и в первом издании) $J^{\infty}(n,p)$. В MMM1 стоит: $JL(n,p)$.

[пр26]В предшествующих двух вариантах вместо «моя теорема 4» стоит не «[LTP]», а «Бомбей». ([LTP] была издана в 1964 г. [*прим. ред. франц. изд.*, 1964, 1.2]). В версии 1971 г. математик Варченко упомянут в качестве исследователя, также доказавшего эту теорему.

[пр27]Следует читать (как и в издании 1971 г.) «связанного с $f(X_i)\cap \cap f(X_i)$».

[пр28]Это «1» — ошибка MMM2. Следует эту единицу опустить.

[пр29]В предшествующих вариантах вместо этой ссылки стоит: «Хотелось бы выразить пожелание, чтобы какой-нибудь алгебраист занялся бы всем этим материалом, чрезвычайно интересный характер которого достаточно очевиден».

[пр30]Эта ссылка добавлена в MMM1 и MMM2, а в издании 1971 г. она отсутствует.

[пр31]Разумеется, следует читать: [редактору перевода: написание следующей формулы следует уточнить! — *Перев.*] «f: $(\overset{|\mathbb{R}}{x}, y) \to (\overset{|\mathbb{R}}{x}, y)$».

[пр32]Здесь фигурируют ссылки варианта 1980 г. В конце статьи приведено множество ссылок в том виде, как они были опубликованы в 1971 г.

Глава 4
Элементарные катастрофы[пр0]

Мы рассматриваем поле локальных динамик, определяемых как градиент некоторого потенциала. *Элементарной катастрофой* называется ситуация конфликта между локальными режимами, минимумы потенциала, которые могут устойчиво возникать в четырехмерном пространстве-времени.

Пренебрегая точностью языка, иногда именем «катастрофа» мы будем обозначать морфологию, которую она заставляет проявиться.

Есть основания различать два типа катастроф: катастрофы *конфликта* и катастрофы *бифуркации*.[пр1]

4.3. Катастрофы конфликта

Речь идет об определении топологического типа поверхностей ударных волн, отделяющих друг от друга различные области, в которых господствуют конкурирующие аттракторы.

Эта проблема почти всегда может быть решена только с помощью принятия некоторого правила вроде «правила Максвелла»: в любой точке x из носителя режим, который берет в ней верх, является наименьшим минимумом. Такое правило позволяет легко определить конфигурации катастрофического множества, порожденные этими конфликтами. Пусть в самом общем случае в пространстве $\mathbb{R}^n$ берется система $(n+1)$ линейных форм $L_0, L_1 \dots L_n$ общего вида: любая система из n форм, полученная из предшествующей системы посредством отбрасывания одной из форм, является базой пространства $\mathbb{R}^{n^*}$, двойственного к $\mathbb{R}^n$.

Тогда область каждого аттрактора определяется множеством неравенств $L_i > L_j$, $j \neq i$, и эти области образуют в $\mathbb{R}^n$ барицентрическое разбиение n-симплекса. (Например, при $n = 2$ будем иметь тройную точку Y, в $\mathbb{R}^3$ — квадратичную точку и т. д.).

Именно это правило создает глубинную мотивацию правила *фаз Гиббса*: в некоторой точке пространства $\mathbb{R}^n$ может существовать самое большее $(n+1)$ локальных режимов в состоянии локального равновесия.

В одной из недавних статей я привел доказательство этого правила в самом общем случае катастроф бифуркации [«Границы теории катастроф». [Прим. ред., 1971, 5]].

4.4. Катастрофы бифуркации

Речь идет о ситуациях конфликта между аттракторами, из которых по крайней мере один перестает быть структурно-устойчивым. Следовательно, они связаны с наличием минимума, который перестает быть невырожденным[пр2]. Если затем будет нужно, чтобы выродился абсолютный минимум, то необходимо, чтобы в начале координат критическая точка из V сама была бы минимумом. Есть только три особенности «stricto sensu» («В строгом смысле»(лат.). — *Прим. перев.*), которые удовлетворяют этому требованию стабильности в $\mathbb{R}^n$.

$V = x^2$. Простой минимум (упомянутый лишь для полноты).

$V = x^4/4$. Сборка, создающая катастрофу Римана – Гюгонио.

$V = x^6/6$. Бабочка.

Омбилики, катастрофы «коранга» два не удовлетворяют этому требованию. Если нужно вернуть их в окрестность единственного минимума, самым надежным средством достичь этого является рассмотрение особенности $V = x^4 + y^4$, «двойного заострения» («double cusp»), согласно К. Зиману. Но эта особенность имеет (алгебраическую) коразмерность, равную восьми, и, следовательно, она появляется только в соединениях элементарных катастроф.

Описание семи элементарных катастроф в $\mathbb{R}^4$ ныне относительно хорошо известно. Если r обозначает ранг квадратичной формы разложения V в ряд Тейлора в $\mathbb{R}^n$, то разность $k = n - r$ представляет собой коранг особенности. Для больших n струи порядка два у функций, коранг которых равен k, образуют подмногообразие коразмерности $k(k + 1/2)$, равной числу коэффициентов квадратичной формы с k переменными. Следовательно, пространству $\mathbb{R}^4$ присущи только особенности коранга один (коразмерности один) или коранга два (коразмерности три), и это омбилики. Особенности коранга три имеют коразмерность $3 \cdot 4/2 = 6$, и поэтому они не характерны для $\mathbb{R}^4$.

4.5. Катастрофы коранга один

Обозначим через x единственную внутреннюю переменную. Так как универсальная развертка x^{n+1} равна $x^{n+1} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i x^{n-i}$, список этих че-

тырех катастроф выглядит следующим образом:
$V = x^3$ — складка, $V = x^4$ — сборка,
$V = x^5$ — ласточкин хвост, $V = x^6$ — бабочка.

Описание этих особенностей и их многообразия бифуркаций в пространстве (u) развертки ныне хорошо известно.

Известно, что плоское обобщенное сечение гиперповерхности бифуркации является огибающей прямых линий: следовательно, она выпукла и имеет $(n-2)$ точек возврата.

Например, для бабочки $V = x^6$, $n = 5$, существует три точки возврата[пр3].

Катастрофы коранга один играют замкнутую роль в нашей концептуальной организации реальности. Катастрофа Римана – Гюгонио является прообразом катастроф захвата и испускания. «Бабочка» является организующим центром схемы действия: источник — послание — получатель сообщения.

В противоположность этому, особенности нечетного порядка встречаются только в ситуации совершенного отставания. Они связаны с переходными (начало–конец) или незавершенными состояниями (за исключением $V = x^5$).

4.6. Особенности коранга два: омбилики

Обозначим через x, y две внутренние переменные. Тогда функция $V(x, y)$ начинается с члена третьей степени. Вещественная проективная классификация кубических форм сразу дает нам следующие случаи.

a) Кубическая форма $Q(x, y)$ с тремя вещественными корнями.

b) Кубическая форма $Q(x, y)$, у которой один вещественный корень и два комплексно-сопряженных.

c) $Q(x, y)$, у которой один двукратный корень и один простой.

d) $Q(x, y)$, которая имеет трехкратный корень.

Случай a) соответствует эллиптической омбилике, случай b) — гиперболической омбилике. Случай c) коразмерности $3 + 1$ соответствует параболической омбилике. Случай d) коразмерности $3 + 2 = 5$ в общем случае не встречается.

Соответствующие канонические формы таковы:

a) $V = x^3 - 3xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$ (эллиптическая омбилика).

b) $V = x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$ (гиперболическая омбилика).

c) $V = x^2y + y^4/4 + sx^2 + wy^2 - ux - vy$ (параболическая омбилика).

Во всех этих случаях база фактор-пространства $\mathbb{R}[[x,y]]/(V_x, V_y)$ используется для определения универсальной развертки.

Следует добавить, что форма с) для стабилизации x^2y является единственной, с точностью до эквивалентности...

Эллиптические и гиперболические омбилики относительно хорошо известны. Дискриминант эллиптической омбилики в пространстве $Ouvw$ представляет собой двойную заостренную пирамиду, сечение которой — это гипоциклоида с тремя точками возврата. В нем можно увидеть организующую особенность всех «заостренных» орудий, таких как пика, острие[пр4] и т. д.

Напомним также, что последовательность плоских сечений (для возрастающего w) дискриминантного многообразия гиперболической омбилики имеет следующий вид:

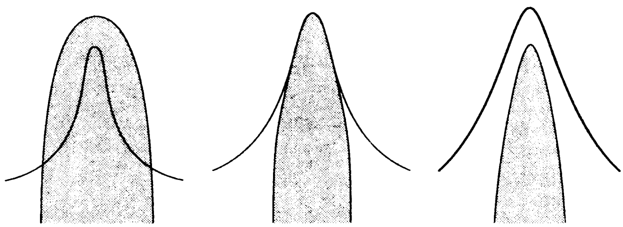


Рис. 1[пр5]

Заштрихованная часть является областью минимума (при условии совершенного отставания). Эта последовательность дает качественное описание прибоя, а центральное сечение, содержащее две точки возврата, соответствует предельному наблюдаемому углу волны в момент прибоя.

Параболическая омбилика[пр6], имея коразмерность четыре, с трудом поддается описанию. Я обязан А. Шансине (A. Chenciner) весьма детальным исследованием дискриминантного многообразия, главные результаты которого воспроизводятся ниже. Затем Годвин (Godwin) и Т. Вудкок (T. Woodcock) обработали эти данные на компьютере, и некоторые полученные ими результаты опубликованы. Все эти авторы позволили мне исправить некоторые ошибки, которые нельзя было исправить в первом издании «Структурной устойчивости и морфогенеза».

Уравнение универсальной развертки

$$V = x^2y + y^4/4 + sx^2 + wy^2 - ux - vy$$

определяет уравнения $V_x = V_y = 0$:

$$u = 2xy + 2sx = 2x(y+s)$$
$$v = x^2 + y^3 + 2wy,$$

которые задают семейство с двумя параметрами (w, s) отображений плоскости $0xy$ на плоскость $0uv$. Критическая кривая такого отображения определяется посредством

$$\begin{vmatrix} 2(y+s) & 2x \\ 4x & 3y^2 + 2w \end{vmatrix} = 0$$

т. е. $4x^2 = 2(y+s)(3y^2+2w)$.

Определенное таким образом многообразие имеет образ Z в пространстве $0uvws$. Для определения топологического типа Z в окрестности начала координат 0 рассечем Z сферой достаточно малого радиуса так, чтобы топологический тип пересечения был бы тем же для любого меньшего радиуса. Затем оставим без внимания «полярные» области этой сферы, соответствующие $u = v = 0$, чтобы сосредоточиться исключительно на трубчатой окрестности экватора $w = s = 0$. На плоскости Osw изображена эта экваториальная окружность (рис. 2)[пр7], на ко-

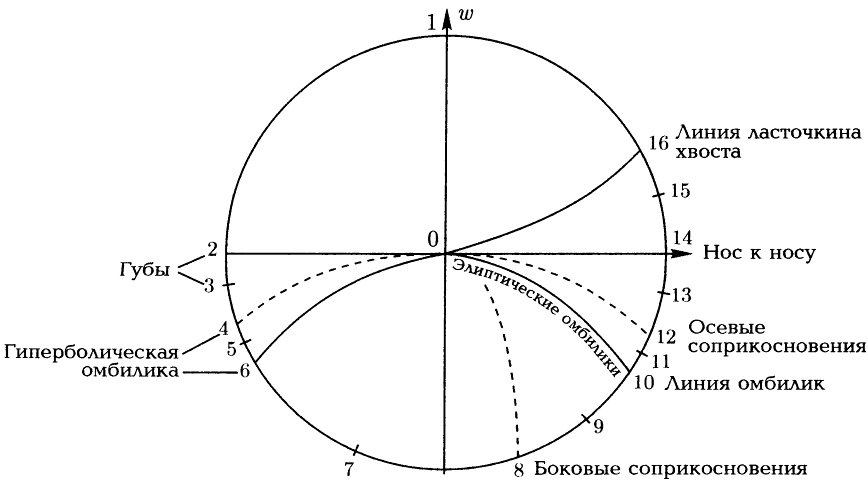


Рис. 2

торую нанесена последовательность из шестнадцати точек, пронумерованных от 1 до 16: каждая из них соответствует одному топологическому типу кривой критических значений на плоскости Ouw, при том что сечение Z плоскостью, нормальной к экватору, оказывается точкой. Приведенный ниже рисунок представляет 16 типов соответствующих кривых.

Качественная характеристика: мы начинаем в точке 1 с кривой, имеющей форму простого возврата (острие вниз). В 2 в начале координат, ниже острия, появляется особая точка, которая представляет собой исчезающую губу. В 3 эта губа увеличивается, в 4 она касается острия, которое она пересекает в 5, определяя таким образом «фаллическую»

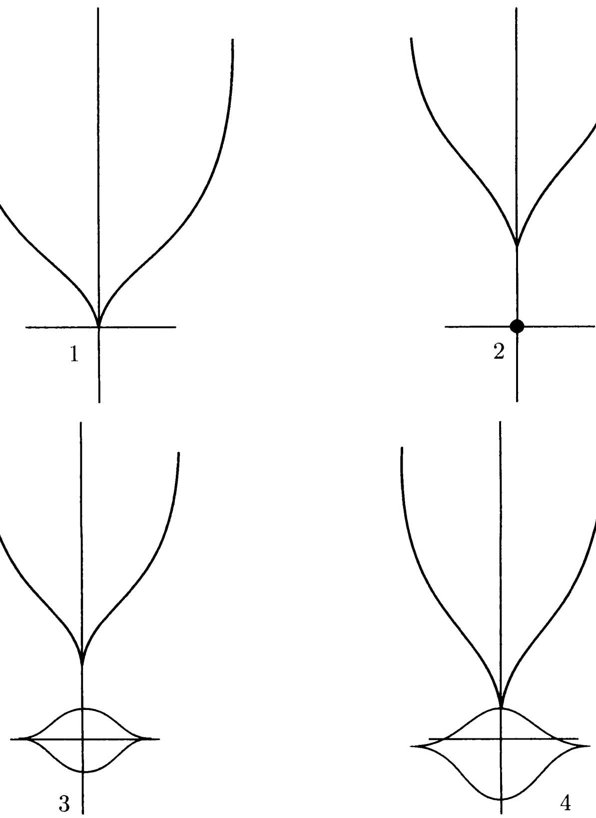


Рис. 3

кривую в грибе, характерном для параболической омбилики. В 6 первоначальное острие соприкасается с нижней ветвью губы в гиперболической омбилике, где две ветви пересекаются. Таким образом, получается кривая 7, где криволинейный треугольник прорезает по бокам кривую, выпуклую вниз.

В 8 этот треугольник сокращается в размерах в такой степени, что его горизонтальные вершины касаются вогнутой кривой. В 9 треуголь-

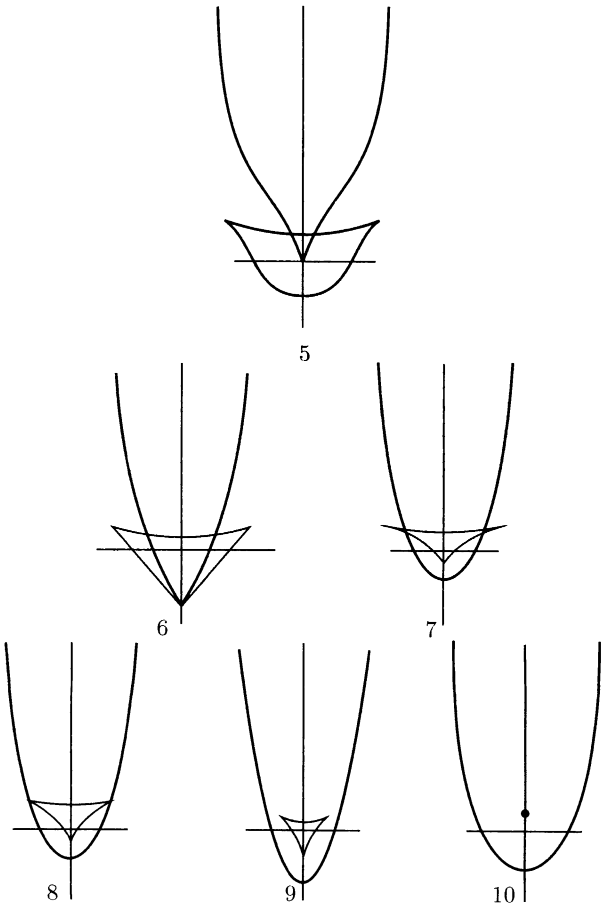


Рис. 3 (продолжение)

ник (H_3) образует гипоциклоиду с тремя точками возврата, целиком лежащую внутри кривой. В 10 этот треугольник H_3 исчезает в эллиптической омбилике. В 11 гипоциклоида снова появляется, имея ту же ориентацию.

В 12 ее нижнее острие встречается с кривой C, которую оно пересекает в 13. В 14 кривая C соприкасается с верхней дугой треугольника H_3

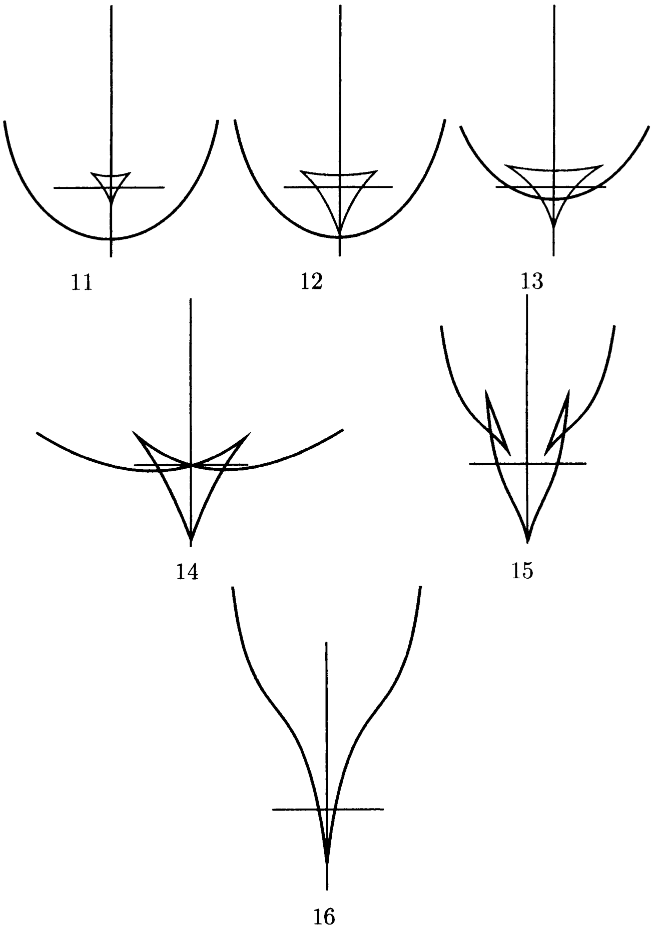


Рис. 3 (продолжение)

в особенности «нос к носу», которая разъединяется в 15, снабжая кривую (C) двумя «ласточкиными хвостами», симметричными и без складок. В 16 эти ласточкины хвосты стягиваются в две симметричные точки, и мы возращаемся к первоначальной кривой 1.

[пр8]Было бы интересно уточнить, как расположены в плоскости Osw кривые в которых принципиальное изменение топологического типа, такое, как 2 (точка губы), 4 (осевое соприкосновение), 6 (гиперболическая омбилика), 8 (боковое соприкосновение), 10 (эллиптическая омбилика), 12 (осевое соприкосновение), 14 (нос к носу), 16 (ласточкины хвосты).

Замечательные кривые:

1). *Омбилики.*

Осуществим перенос начала координат $x = a + X$, $y = b + Y$ в выражении V. Член второго порядка таков:

$$X^2(b+s) + 2aXY + Y^2(3/2b^2 + w),$$

приравнивая его к нулю, получаем:

$$s = -b, \qquad a = 0 \qquad \text{и} \qquad w^2 + 3/2s^2 = 0.$$

Это последнее, параболическое, уравнение определяет положение омбилик.

Член третьего порядка таков:

$$X^2Y + bY^3 = Y(X^2 + bY^2).$$

Для отрицательного b и положительного s получается эллиптическая омбилика (три действительных корня в кубической форме).

Для положительного b и отрицательного s получаем гиперболическую омбилику.

2). *Линия осевых соприкосновений.*

Прообраз оси симметрии Ov, определенный условием $u = 0$, есть $2x(y+s)$[пр9]. Следовательно, можно сказать, что точка $(x = 0,\ y = -s)$ и одна из точек $(x = 0,\ y = \pm\sqrt{-2w/3})$ имеют один и тот же образ на Ov.

Поскольку $v = x^2 + y^2 + 2wy$, это дает нам

$$-s^2 - 2ws = \pm\sqrt{-2w/3}(-2w/3 + 2w) = \pm 4/3w\sqrt{(-2w/3)}.$$

Избавляясь от квадратного корня, имеем:

$$16/9w^2(-2w/3) = 4w^2s^2 + 4ws^4 + s^6.$$

Диаграмма в классификации Ньютона, соответствующая этой алгебраической кривой, оказывается первой характеристической степенью Пюизе вида $s^2 = cw$. Коэффициент c является решением уравнения

$$c^3 + 4c^2 + 4c + 32/27 = 0.$$

Этот многочлен по степеням c имеет минимум при $c = -2/3$ (он соответствует кривой омбилик $w + 3/2s^2 = 0$). Фактически этот минимум равен нулю: $-8/27 + 16/9 - 8/3 + 32/27 = (-8 - 72 + 48 + 32)/27 = 0$. Из этого следует, что ветвь соответствующей кривой является касательной второго порядка к кривой омбилик.

3). *Линия ласточкина хвоста.*

Положим $y + s = Y$. Критическая кривая[пр10] отображения $(x, y) \xrightarrow{f} (u, v)$ задается уравнением: $x^2 = Y/2(3(Y-s)2+2w)$. Ради краткости обозначим этот многочлен $P(Y) = 3/2Y^3 - 3sY^2 + (w + 3/2s^2)Y$.

Вектор $(\delta x, \delta Y)$ касается критической кривой в точке (X, Y), если

$$2x\delta x = P'(x)\delta Y, \text{ т. е. } \frac{\delta x}{P'(x)} = \frac{\delta Y}{2x}.$$

Такой вектор $(\delta x, \delta Y)$ находится в ядре струи $j^1(f)$, если $2Y \cdot \delta x + 2x \cdot \delta Y = 0$, или, подставляя пропорциональные величины:

$$2YP'(Y) + 4x^2 = 2Y \cdot P'(Y) + 4P(Y) = 0.$$

Итак, в соответствии с записанной ранее формой $P(Y)$, имеем:

$$P'(Y) = 9/2Y^2 - 6sY + (w + 3/2s^2),$$

откуда получаем уравнение, определяющее точку возврата:

$$\begin{aligned}2P(Y) + Y \cdot P'/(Y) &= \\ &= 3Y^3 - 6sY + (2w + 3s^2)Y + 9/2Y^3 - 6sY^2 + (w + 3/2s^2)Y = \\ &= 15/2Y^3 - 12sY^2 + 3(w + 3/2s^2)Y = 0.\end{aligned}$$

После исключения тривиального корня $Y = 0$ остается уравнение второй степени $15/2Y^2 - 12sY + 3/2(2w + 3s^2) = 0$, о котором мы писали, что оно имеет двукратный корень (совпадающие возвраты):

$$\begin{aligned} 36s^2 &= 45/2(w + 3/2s^2), \text{ т. е.} \\ s^2(36 - 3 \cdot 45/4) &= 45/2 \cdot w, \\ s^2/4 \cdot (144 - 135) &= 45/2 \cdot w, \\ 9/4s^2 &= 45/2 \cdot w, \qquad w = s^2/10. \end{aligned}$$

4). *Линия боковых соприкосновений* (случай 8 рисунка 2).

В использованных выше обозначениях имеем:

$$v = x^2 + y^2 + 2wy = P(Y) + (Y - s)^3 + 2w(Y - s),$$

$$\begin{aligned} v = Q(Y) = 3/2Y^3 - 3sY^2 + \\ + (w + 3/2s^2)Y + Y^3 - 3sY^2 + 3s^2Y - s^3 + 3s^2Y - s^3 + 2wY, \end{aligned}$$

$$Q(Y) = 5/2Y^3 - 6sY^2 + 3/2(w + 3s^2)Y - 2ws.$$

Производная $Q'(Y) = 15/2Y^2 - 12sY + 3/2(w + 3s^2)$ обращается в нуль при двух значениях Y, одно из которых, находящееся в окрестности начала координат, определяет вещественные точки возврата кривой-образа.

Пусть d будет этим корнем. Тогда другой (простой) корень многочлена $Q(Y) = v$ будет a, и он определяется уравнением $2d + a = 12/5s$. Этот другой корень определяет простые точки критической кривой, образы которых имеют ординату[пр11] v. Остается добавить, что эти точки имеют тот же образ, что и точки возврата, определенные посредством d. Для этого запишем равенство значений u:

$$[xY](a) = [xY](d); \text{ возводя в квадрат, получаем:}$$

$$x^2Y^2(a) = x^2Y^2(d),$$

$$Y^2P(Y) = 3/2Y^5 - 3sY^4 + AY^3, \text{ где } A = 3/2s^2 + w.$$

Записывая равенство значений для $Y = d$, $Y = a$ и производя вычитание, имеем (уравнение D):

$$3/2(d^4 + d^3a + d^2a^2 + d{\cdot}a^3 + a^4) - 3s(d^3 + d^2a + + d{\cdot}a^2 + a^3) + A(d^2 + d{\cdot}a + a^2) = 0.$$

Видно, что если положить $A = ks^2$, то уравнение (D) является изобарой по s и a или d. Отсюда следует существование уравнений вида $d = cs$ и соответственно $a = c's$. Тогда получается кривая, определенная соотношением вида $A = ks^2$, так что $(3 : 2 - k)s^2 = w$. Очевидно, любой другой показатель степени g в $w = sg$ сделал бы невозможным удовлетворение требованиям (D), когда s стремится к нулю[пр12].

4.7. Омбилики и морфология прибоя

Мы видели, что гиперболическая омбилика выступала в качестве модели гребня волны во время прибоя. Есть основания рассматривать эллиптическую омбилику в качестве организующего центра всех заостренных органов и инструментов как в биологии, так и в технике (хотя треугольное сечение в гипоциклоиде с тремя точками возврата реализовалось бы достаточно редко по причинам, к которым мы еще вернемся). Параболическая омбилика обозначает столкновение этого острия с поверхностью, которое заканчивается расщеплением вдоль бокового ребра гипоциклоидального сечения. В некотором смысле шпага является инструментальной реализацией перехода «эллиптический→гиперболический». То же можно сказать и о штыке: рука атакует поверхность противника острием, чтобы она затем разодралась по линии сечения, реализуя таким образом прибой гиперболического типа. В гидродинамике эллиптическая омбилика является моделью струи жидкости, но существование сил поверхностного натяжения не позволяет предполагать наличие устойчивых ребер возврата на поверхности жидкости. Таким образом, эллиптическая омбилика является *запрещенной особенностью* для поверхности жидкой фазы вещества.

В большинстве случаев происходит вырождение особенности и ее превращение в струю, содержащую в приближенной форме симметрию вращения. Отсюда и появление после перехода через гиперболическую особенность в качестве меридиана грибовидных форм вместе с образованием капли жидкости на конце струи... В следующей главе мы еще вернемся к вопросу о запрещенных особенностях.

Примечания редактора

[пр0]1971, 3, 4. Переиздано в ММM1, гл. 4, с. 71–90, и в MMM2, гл. 5, с. 91–99.

[пр1]Эта «шапка» в MMM2 выделена курсивом.

[пр2]Начиная с этого места и до конца фразы, которая обозначена с помощью «пр3», варианты 1971 г. и MMM1, с одной стороны, и MMM2, с другой, отличаются, как это видно из варианта, приведенного ниже.

[пр3]Конец варианта.

[пр4]В варианте 1971 г. вместо «острие» («pointe») в результате опечатки стоит «точки» («points»).

[пр5]На рисунке в издании 1971 г. точки перегиба неправильно лежат на закругленной кривой. Этот рисунок не пронумерован ни в одном из трех изданий. Мы восстановили стандартную норму представления рисунков и здесь, и во всем тексте.

[пр6]В MMM1 и MMM2 «параболическая омбилика» напечатано жирным шрифтом, как заголовок подраздела.

[пр7]В оригинале есть «Рисунок 3». Рисунок 2 вообще не появляется, и вся совокупность чертежа и кривых, приведенных ниже, обозначается как «Рисунок 3» в противоречии с тем, что говорится в тексте. Мы восстановили нумерацию рисунков и соответствующие ссылки.

[пр8]Начало этого отрывка опущено в MMM1 и MMM2.

[пр9]Отсутствует «$= 0$».

[пр10]Отображение f обозначает отображение плоскости $0xy$ на плоскость $0uv$, определенное уравнениями $V_x = V_y = 0$. Оно зависит от двух параметров (w, s).

[пр11]Разумеется, следует читать «ординаты» (в кавычках).

[пр12]Этот отрывок с места «Было бы интересно уточнить в плоскости $0sw \ldots$» (см. выше пр8) опущен в изданиях 1971 г. и 1980 г.

Вариант (опубликован в MMM1 и MMM2, небольшие различия между MMM1 и MMM2 отмечены в тексте квадратными скобками).

Если мы хотим описать морфологию множества катастроф, связанную с ними, мы придем к развертыванию этой особенности в ее пространстве универсальной развертки U. [Так же, как мы видели это в §2.8 (MMM1)]. Любая особенность бифуркации порождает в своей окрестности катастрофы конфликта. Если допустить, что эти конфликты подчиняются условию Максвелла, мы придем к определению в пространстве U множества Максвелла K [универсального катастрофического множества K (MMM1)], связанного с этой особенностью: множество таких точек $u \in U$, что соответствующий многочлен $P(x; y)$ достигает своего абсолютного минимума более чем в одном простом минимуме. Для любой конкретной реализации катастрофы, определенной с помощью «волны роста» $F\colon \mathbb{R}^4 \to U$, морфологически реализованная катастрофа является прообразом $F^{-1}(K)$.

4.2.1. Катастрофы бифуркации [в (MMM1) нет подпараграфа]

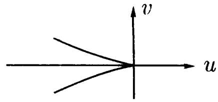
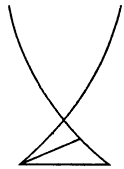
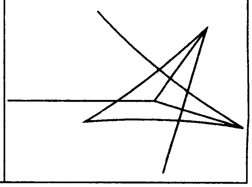
Простейшие катастрофы бифуркации задаются потенциалами $V = x^4/4$, $V = x^6/6$, $V = x^6/8$ коранга один и $V = (x^4 + y^4)/4$ коранга два.

Только два первых потенциала (сборка и бабочка) появляются в четырехмерном пространстве. Зато последний потенциал (двойная точка перегиба), хотя он и не является обобщенным, похоже, играет важную роль в лингвистике, поскольку он позволяет описать конфликт двух режимов, четырех «действующих лиц». Далее мы приведем иллюстрацию этого в окрестности параболической омбилики, которая является «случайной» для этой особенности.

4.2.2. Особенности коранга один [в (MMM1) нет подпараграфа]

Любая особенность коранга один имеет вид $V = x^k$ и коразмерность $(k-2)$. Таблица этих устойчивых особенностей в $\mathbb{R}^4$, $k \leqslant 6$, представлена на следующей странице.

Мы внесли в диаграмму множество Максвелла, соответствующее каждой особенности. Например, для $V = x^4/4$ (бабочка) множество Максвелла представляет плоскую ударную волну, разделенную на слои

Название	Особенность	Универсальная развертка	Обобщенное плоское сечение
Минимум	$V = x^2/2$	$V = x^2/2$	
Складка	$V = x^3/3$	$V = x^3/3 + ux$	
Сборка	$V = x^4/4$	$V = x^4/4 + ux^2/2 + vx$	
Ласточкин хвост	$V = x^5/5$	$V = x^5/5 + ux^3/3 + vx^2/2 + wx$	
Бабочка	$V = x^6/6$	$V = x^6/6 + ux^4/4+$ $+vx^3/3 + wx^2/2 + tx$	

тройным ребром вдоль ее края. Плоская кривая, сечение дискриминанта многочлена V_x при $V = x^k$ обнаруживает $(k-3)$ точек возврата. Например, для бабочки $V = x^6$, $n = 5$, и есть три точки возврата.

Глава 5

Границы теории катастроф[пр0]

Схема, данная теорией элементарных катастроф, содержит строгие ограничения, которые ставят под угрозу ее возможные приложения. Мы различаем: 1. Возражения математического характера, вызванные нынешним состоянием качественной динамики. 2. Проблемы[пр1], поставленные временно́й эволюцией катастрофы. 3. Проблемы пространственно-временного скопления катастроф. 4. Вопросы, возникающие в связи с приложением теории к специфическим конкретным проблемам.

5.8. Возражения математического характера

Если M является многообразием внутренних состояний процесса, которое предполагается компактным, то $D(M)$ называется пространством векторных полей над M. Почти невозможно надеяться на создание последовательной теории, если поле X, определяющее локальную динамику, не будет иметь лишь конечное число аттракторов, способных принять участие в конкуренции. Следовательно, мы должны были бы надеяться, что «почти любое» поле X обладает этим свойством. Но Шелдон Ньюхаус доказал, что в $D(M)$ может существовать открытое множество, в котором поля X, имеющие бесконечное число аттракторов, являются плотными[пр2].

Более того, мы никогда не знаем, является ли «почти любой» аттрактор[пр3] структурно-устойчивым с точки зрения своей локальной топологии в окружающем пространстве. Но тогда возможность иметь последовательную теорию морфогенеза, основанную на произвольной динамике X, представляется весьма ограниченной...

Несомненно, нет большой разницы между градиентной динамикой и динамикой X, допускающей функцию Ляпунова. Как известно, поле допускает функцию Ляпунова в окрестности любого аттрактора. Но особенности такой функции Ляпунова не те, которые предусматривала теория универсальной развертки критических точек функций. Таким образом, мы возвращаемся к возражению Дж. Гукенхеймера (J. Guckenheimer): универсальная развертка градиентного поля в множестве «градиентоподобных» («gradientlike») полей в общем случае больше, чем универсальная развертка первоначальной потенциальной функции. Наконец, в случае общей динамики контрпримеры Такенса (Takens) доказали, что существуют струи векторных полей, не допускающие стабилизации добавлением членов более высокого порядка, и в этом случае теория универсальной развертки также теряет всякую значимость. Таким образом, она очень быстро ведет к появлению «обобщенных катастроф» со сложной морфологией: к ветвящимся множествам и к множествам Кантора. Впрочем, такая морфология не может быть исключена, поскольку весьма правдоподобно, что у нее есть эмпирические реализации. В качестве примеров можно указать на кровообращение у животных, на «канторовскую» структуру трубок турбулентности в механике жидкостей и газов (как на том настаивают некоторые авторы[пр4].)[*)].

Наконец, добавим к этому, что в гамильтоновой механике нет аттрактора (по причине сохранения меры Лиувилля). Следовательно, почти совсем непонятно, как приспособить имеющуюся схему к случаю локальных гамильтоновых динамик. Возможно, именно поэтому квантовая механика не предоставляет, собственно говоря, никакой морфологии.

Между тем не следовало бы преувеличивать важность этих оговорок. Весьма правдоподобно, что единственные процессы, которые можно было бы эмпирически рассмотреть как детерминированные, единственные корректно поставленные задачи, подчиняются принципу оптимальности или, по крайней мере, — экстремальности. Этот факт особенно очевиден в теории уравнений Гамильтона – Якоби: в самом деле, было доказано, что теория особенностей проекций на базу лагранжевых многообразий на слое ковекторов тождественна теории элементарных катастроф. Единственное отличие от общего случая заключается в том, что тогда некоторые внутренние переменные получают непосредственную интерпретацию как производные некоторого сечения слоя по отношению к координатам базы, что это ведет к наложению ограничений на природу возможных особенностей, ограничений того же типа, что накладываются симметриями, которые мы рассмотрим в § 4[пр6].

[*)] Об этом сообщается в недавней книге Б. Мандельброта «Фрактальные объекты» (B. Mandelbrot. Les objets fractals)[пр5].

5.9. Временнáя эволюция катастрофы

Предположим, что природный процесс происходит в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^3$ и что в данный момент времени этим процессом руководит катастрофа элементарного типа, допускающая в качестве универсальной развертки пространство W, содержащее универсальное катастрофическое множество K (как таковое определенное условием Максвелла). Тогда морфологическое состояние процесса определено отображением G: $U \times T \to W$, *волной роста*.

При самых общих предположениях мы допускаем, что это отображение G является дифференцируемым и трансверсальным на множестве катастрофы K. Тогда наблюдаемое множество катастрофы является не чем иным, как прообразом $G^{-1}(K)$ в U. В соответствии с этой гипотезой трансверсальности, эмпирическая морфология не изменяется при малом возмущении начальных условий, откуда и вытекает характер «морфогенетического поля» соответствующего «креода» для наблюдаемого процесса. Но это требует, чтобы в начале процесса отображение G: $(U; 0) \to W$ было бы погружением или, иначе говоря, чтобы функции координат w_i на W имели бы образ $G^*(w_i)$ максимального ранга на U. Можно сказать, что среда U должна быть первоначально *поляризована* введенными таким образом функциями.

Но такая гипотеза не обязательно реализуется. Напротив, очень часто среда U может рассматриваться как *гомогенная*, и в этом случае в принципе отображение G: $(U; 0)$ должно быть точечным. В сущности, по прошествии короткого времени это отображение «разглаживается», становится обобщенным. Но тогда мы сталкиваемся с новым типом особенностей, с особенностями сложных отображений вида $V(x, G(u))$, $u \in U$. По крайней мере, в начале катастрофы особенность должна быть развернута на множестве функций, допускающих один и тот же тип факторизации.

В случае эмбриологии, например, яйцо (часто) является «гомогенным», по крайней мере, по отношению к некоторой группе симметрии[пр7] ... В ходе осуществления «развертки»[пр8] этой функции G получающаяся обобщенная особенность оказывается «складкой», характеризуемой уравнениями вида $w = y^2$. Тогда порождающий потенциал является четным по y и на развертке, линейной относительно y; если $v.y$, мы получаем эволюцию, симметричную относительно $v = 0$: имеется экстернализация внутренней симметрии. Именно таково естественное истолкование происхождения двусторонней симметрии у позвоночных.

Следовательно, некоторое подлежащее поляризации[пр9] состояние может создавать особенности более сложные, чем те, которые можно было бы ожидать в нормальной ситуации[пр2].

Что из этого следует для эволюции (в собственном смысле слова) волны роста?

Ясно, что нельзя «a priori» сформулировать никакое правило этой эволюции. Тем не менее можно рассмотреть общую ситуацию, в которой на произведении $M \times W$ внутреннего пространства на развертку определяется «горизонтальное» поле H. Тогда с помощью проекции на W мы получаем кусочно-дифференцируемое векторное воле, точки разрыва которого находятся на стратах множества катастрофы K. (См. понятие «приведенного» поля. Том [SSM[пр10].) Конечно же, не составляет труда произвести полную классификацию тех расположений, которые могли бы обнаруживать эти приведенные поля[пр7] ... Во всяком случае, можно поставить вопрос о том, существуют ли среди горизонтальных полей H поля, канонически связанные с примитивной катастрофой. Впрочем, я показал, как, допуская, что составляющая H возникает таким образом, чтобы ослабить действие примитивной динамики, мы приходим к градиенту V, относительно гиперболической метрики вида $dx^2 - k^2du^2$. Если сделать эту метрику вырожденной (положив k равным бесконечности), то можно получить в качестве предела аттракторов петли гистерезиса, заданные на примитивной метрике с помощью условия совершенного отставания. В этом заключен, по меньшей мере, зародыш теории, определяющей «универсальные эволюции» катастроф, т. е. векторных полей над полным пространством $X \times W$, определенным единственной начальной катастрофой[пр2].

Похоже, предыдущий пример, весьма важный для биологии («метаболическая стабилизация» мезодермы), доказывает, что речь идет о механизме высокой степени общности, который мог бы также объяснить появление гиперболических метрик в физике. В любом случае представляется ясным, что это — единственный путь, ведущий к морфологическому объяснению, столь же экономному, сколь и возможному, поскольку невозможно было бы ввести никакой новый потенциал на пространстве W.

5.10. Пространственно-временное скопление катастроф

Элементарные катастрофы вызывают, если можно так выразиться, только фундаментальные морфологические происшествия в пространстве-времени. В этом смысли они играют роль, аналогичную четырем элементарным действиям арифметики, которые, действуя на дискретную систему натуральных чисел, позволяют разработать алгебру и аксиоматически порождают формальные системы. Отличие же состоит в том, что объединение катастроф не может больше основываться, как в теории формальных систем, на автоматическом повторении некоторых действий, но, напротив, основывается на внутренней комбинаторике, заданной динамическим истолкованием.

Если ограничиваться единственно планом элементарных катастроф, определяемых градиентной динамикой, то обобщение оказывается очевидным[пр2].

Если рассматривать особую изолированную точку потенциала коразмерности $q > 4$, то можно будет описать эволюцию волны роста в W, трансверсальной на множестве катастрофы K как пространства $\mathbb{R}^4$, погруженного в пространство W универсальной развертки. Сечение этого $\mathbb{R}^4$ множеством катастрофы K определяет скопление элементарных катастроф, которое, совершенно очевидно, будет обладать свойством структурной устойчивости... Я сам, к примеру[пр11], применил эту идею в своей статье о пространственно-временном происхождении синтаксических структур (LC[пр12]). Если отказаться от строгого формализма градиентных динамик, вводя аттрактирующие (притягивающие) циклы приведенного поля, то можно дать хорошее истолкование многим загадкам биологической морфологии. Например, проблема курицы и яйца легко разрешается ссылкой на эволюцию циклической волны роста в универсальной развертке размерности четыре. (Тогда сосредоточение в организующем центре метаболизма, реализуемое в ходе гаметогенеза, будет уменьшенной разверткой организации цитоплазмы..., разверткой, которая в ходе эмбриологического развития будет продолжена на развертку в масштабе органа). Очевидно, что такое объяснение не является полным: оно требует «потенциала остановки», вводимого ad hoc[пр13] («Применительно к данному случаю» (лат.) — *Прим. перев.*). Но проблема последовательности катастроф — даже в физических теориях вроде гидродинамики или теории фазовых переходов — настолько сложна, что мы не можем избежать действий наощупь. Представляется правдоподобным, что несколько более тонкая утонченная теория должна будет вводить качественные соображения, что может потребовать некоторой формы интегрирования в бесконечномерных (функциональных) пространствах. Квантовая теория поля могла бы послужить этому примером в ситуации, которая глобально структурирована относительно слабо.

5.11. Теория катастроф и ее приложения[пр14]

Можно упрекнуть теорию катастроф в том, что она является абстрактной схемой, никак не зависящей от физической реальности. В сущности, сама по себе теория катастроф является чисто качественной, она игнорирует одновременно и соображения масштаба, и количественные законы классической физики. Впрочем, эти два возражения достаточно противоречивы.

В сущности, любая количественная модель, содержащая физические величины, должна быть независимой от единиц, которые служат для измерения этих величин.

Следовательно, рассматриваемый феномен должен быть на самом деле инвариантным относительно растяжения пространства-времени. Однако большинство феноменов, рассматриваемых в нашем масштабе, не допускают такой инвариантности: гомотетия муравья не является слоном. Соответственно только феномены, связанные с геометрией пространства-времени могут быть объектом количественной модели: именно таков случай великих законов классической физики (гравитации, электромагнетизма), но лишь при условии избегания масштабов меньше 10^{-30} см.

Следовательно, если и нет необходимости иметь стройную количественную модель, то зато можно попытаться принять в расчет известные свойства материального субстрата. В этом отношении очень важным является понятие фазы. Фаза определяется псевдогруппой локальных эквивалентностей G, группа G которой является группой изотропии. Тогда естественно допустить, что группа Ли G действует — нетривиально — в пространстве M внутренних состояний. Локальный потенциал V должен быть инвариантным относительно этого действия, равно как и все его развертки. Можно также одновременно «развернуть» действие группы G, что может заставить появиться подгруппу G' группы G (нарушение симметрии). Следовательно, нужно ожидать, что поверхность, ограничивающая две фазы псевдогрупп Γ и Γ' имеет специфические особенности, природа которых должна единственным образом определяться парой Γ, Γ' находящихся в конфликте псевдогрупп. Такую теорию еще предстоит создать практически с нуля.

В этом же ряду идей находится место для учета феноменов поверхностного натяжения жидкости. Уже говорилось, что этот феномен запрещает[пр15] присутствие эллиптической омбилики на поверхности жидкости. Напротив, этот же феномен может создать локальные симметрии, возникающие вследствие принятия условия минимума площадей. Так, жидкая струя будет проявлять тенденцию совершать вращения вокруг своей оси. Следовательно, в гидродинамике эллиптическая омбилика заменяется гиперболической омбиликой, определяемой функцией типа $V(z;r)$, где r обозначает расстояние до оси вращения. Точно так же уравнения сохранения в жидкости запрещают появление некоторых разрывностей у поля скоростей вдоль ударной волны (например, таких разрывов, которые создавали бы в жидкости пузырьки). Вместо этого появляется некоторый разрыв, при наличии которого два вектора скорости являются касательными к поверхности удара («slip discontinuity»). Итак, то, что два векторных поля имеют общее инвариантное многообразие, определяет особенность бесконечной коразмерности в функциональном пространстве пар полей[пр2].

Поэтому не следует удивляться, если некоторые ограничения (вызванные симметриями или условиями дифференцируемости) приводят к появлению особенностей бесконечной коразмерности, которые нормальная теория отвергает как абсолютно невероятные.

Вместо заключения[пр16] необходимо также обратить внимание на часто повторяемое возражение: «Теория катастроф не поддается экспериментальной проверке, поэтому она не представляет никакого научного интереса».

На это можно, во-первых, ответить, что выбор между двумя моделями теории катастроф иногда может быть сделан на основе эксперимента. Однако сначала следует мысленно создать эти модели, а уже потом подвергать их экспериментальной проверке. (Здесь, впрочем, ставится трудная проблема объединения моделей в теории катастроф. Если имеются две модели M, M', конкурирующие между собой, то можно ли найти модель M'', «которая охватывает их обе»?[пр17])

В общем смысле философии науки было бы неплохо вернуться к следующему общему принципу: то, что по-настоящему важно в некоторой модели, — это не ее согласие с опытом, но, наоборот, именно ее «онтологическое значение», т. е. то, что в ней утверждается о способе существования феноменов, то, что она описывает механизмы, лежащие в их основе[пр2].

В сущности, если задана произвольная эмпирическая морфология, то всегда возможно предъявить количественную модель, содержащую достаточное число произвольных параметров, которые учитывают опыты в данном приближении. Если стремиться к обладанию хорошей моделью, то следует устранить максимальное число этих произвольных параметров: речь идет о частном случае проблемы «уменьшения произвольности» описания. Это цель, которую теория катастроф в состоянии достичь без особых затруднений с помощью предлагаемого ею динамического истолкования. Для того чтобы хорошо описывать, необходимо понять, что время призраков квантовой механики 1925–1930 гг., увы, прошло...

Примечания редактора

[пр0]1971, 3.5. Эта глава была переиздана почти в том же виде, как в MMM1, с. 81–88, в качестве главы 5. Она была переиздана в MMM2 в 1980 г, с. 101–109, как вторая часть главы 6 под заголовком «Приложения теории катастроф», и ей предшествует «шапка». Эта «шапка» и первая часть даны ниже, и в примечании воспроизведены также некоторые варианты, включенные Томом в эти последние издания.

[пр1]В MMM2 стоит «Проблема».

[пр2]В MMM1 и MMM2 опущен следующий абзац.

[пр3]В MMM2 стоит «Известно, что аттрактор может не быть».

[пр4]В MMM1 и MMM2 здесь стоит многоточие.

[пр5]Примечание добавлено в MMM2.

[пр6]В MMM2 стоит: «ограничений, приводящих к специфическим особенностям, которые в нормальном случае не должны были бы существовать. Этот феномен точно так же встречается в случае особенностей, удовлетворяющих условиям симметрии, которые мы рассмотрим в § 4».

[пр7]В MMM1 и MMM2 многоточие заменено точкой.

[пр8]Из-за опечатки в MMM1 и MMM2 «развертка» («déploiment») превратилась в «разглаживание» («dépliement»).

[пр9]В MMM1 и MMM2 «поляризованное» превратилось в «первоначально недостаточно поляризованное».

[пр10]В MMM1 и MMM2 ссылка опущена.

[пр11]В MMM1 «к примеру» исчезает.

[пр12]Эта ссылка, примечание редактора 1971, 5, опущена в MMM1, а в MMM2 заменена ссылкой на главу X работы, переизданной как глава 4 в издании 1974 г. и глава 4 в издании 1968 г. (именно в этом порядке).

[пр13]В MMM1 добавлен курсив: «ad hoc» (для всех латинских выражений такого вида: «ad hoc», «a priori», «a posteriori» и т. д. Том употребляет все возможные графические формы с использованием курсива или без него, с использование кавычек или без них).

[пр14]В MMM2 добавлено: «Симметрии — запрещенные особенности».

[пр15]В МММ2 «запрещает» напечатано курсивом.

[пр16]В МММ2 здесь выделен параграф под заголовком «Вместо заключения».

[пр17]В МММ1 и МММ2 вопросительный знак исчезает вместе с кавычками, окружающими фразу «которая охватывает их обе».

«Шапка» и первая часть, «Приложения первого типа». (Опубликовано в 1980 г.)

Приложения ТК (теории катастроф. — Прим. перев.*) сводятся к двум совершенно различным категориям случаев. Первая категория охватывает «строгие» приложения теории: модель, к которой применяется формализм катастроф, вооружена применением точных количественных законов (физика и механика). То, что дает ТК в этом случае, — это быстрое «качественное» истолкование глобального поведения решений и их особенностей. Само собой разумеется, что в этом случае точные количественные результаты в принципе возможны, и, следовательно, модель предоставляет возможности предсказания.*

Напротив, модели второго типа (используемые в биологии и гуманитарных науках) исходят из подлежащей истолкованию эмпирической морфологии. Тогда строится поле дифференциальных систем над контролируемым пространством и предпринимается попытка обеспечить совпадение наблюдаемой морфологии с множеством катастрофы модели. В общем случае дифференциальные системы определяются только с точностью до дифференцируемой эквивалентности, и, следовательно, они не предоставляют возможности делать количественно достоверные предсказания. Их целью является обеспечение глобальной картины происходящего, истолкованной в терминах конфликта режимов. Они позволяют также разработать классификацию, аналогичную динамической ситуации, которая считается ответственной за порождение экспериментальной морфологии.

Следовательно, эти «качественные» модели обладают главным образом герменевтической, интерпретативной ценностью. Относительно этих двух типов моделей можно говорить соответственно о «жесткой теоретизации» (для первой категории) в противоположность «мягкой» теоретизации (для второй).

Согласно общему требованию, научное сообщество без излишних колебаний приняло приложения первого типа. Зато оно с куда *большим трудом осознало значение приложений второго типа. Книга Кристофера Зимана «Catastrophe Theory» (Addison Wesley) представляет собой настоящую энциклопедию всех типов моделей, относящихся к обеим категориям. Недавно вышедшая в свет книга Стюарта – Постона (Catastrophe Theory and its Applications — Pitman editor) ограничивается, практически, моделями первого типа. В работе, предлагаемой читателю (имеется в виду MMM2.* — Прим. ред. франц. изд.), *мы ограничиваемся составлением списка приложений первого типа. Как читатель увидит в последующих статьях, я и в самом деле убежден, что главная оригинальность ТК и ее будущая плодотворность основываются на «приложениях» второго типа. Таким образом, вся последняя часть работы посвящена, в сущности, моделям герменевтического типа.*

Приложения первого типа

1. Лагранжев формализм (не выпуклый)

Речь идет о том, чтобы найти в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ траектории $x(t)$, которые минимизируют интеграл вида $I(f) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \dot{x})dt$ при граничных условиях $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, где x_0, x_1 — данные точки в $\mathbb{R}^n$.

Тогда мы создаем расслоение (x,p) ковекторов над $\mathbb{R}^n$ и в этом пространстве $T^*(\mathbb{R}^n)$ конструируем «лагранжиан»

$L(x,p,\dot{x}) = f(x,\dot{x}) - \langle p, \dot{x}' \rangle$, где $\langle\,\rangle$ обозначает скалярное произведение.

Тогда мы рассматриваем x, p как контролируемые координаты, $\dot{x}'$ — как переменную состояния и минимизируем L для фиксированного (x,p). В результате после применения условия Максвелла появляются множества катастрофы в $T^*(\mathbb{R}^n)$, где мы переходим от одной величины $\dot{x}'$, минимизирующей L, к другой. В работах Айвора Икленда (Ivor Ekeland) можно найти явное описание решений в случае $n = 1$.

2. Каустики и лагранжевы многообразия

В пространстве ковекторов $T^*(\mathbb{R}^n)$ многообразие W^n называется лагранжевым, если сужение фундаментальной 2-формы $\sum\limits_i dx_i \wedge dp_i$ в W

обращается в нуль на W. В точке x из W, где W трансверсально к слоям канонического расслоения π: $T^*(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $\pi(x,p) = x$, существует такая локальная функция $S(x)$ (действие), что W локально определяется посредством $p_i = S/x_i$. Там, где это условие трансверсальности не выполняется, удобно считать координаты (p) локальными координатами в W, а $\sum_i x_i dp_i$ — замкнутым множеством на W. Таким образом, мы определяем семейство функций $G(p;\, x)$, зависящих от координат (x) точки базы. Тогда можно показать, что в общем случае размерности $n < 11$ это семейство функций является на самом деле индуцированным универсальной разверткой центральной особенности $G(p; x_0)$ (и это несмотря на тот факт, что семейство $G(p; x)$ *a priori* имеет специальный вид, так что зависимость от x оказывается линейной). Именно московской школе В. И. Арнольда мы обязаны главными результатами по этой проблеме. Те проекции лагранжевых многообразий, которые выступают в качестве каустик в геометрической оптике, имеют большое значение в теоретической физике, где квантование с помощью метода «осциллирующих интегралов» (метода ВКБ), а также метод перевала ведут к вычислению критических показателей степени, связанных с алгебраической природой центральной сингулярности $G(p; O)$ [следует читать $G(p; x^0)$. — *Прим ред. франц. изд.*]. Эта тема сейчас широко обсуждается в литературе (Маслов, Хормандер, Мальгранж и др. среди математиков; М. Берри. Дж. Най (J. Nye) занимаются исследованием каустик методами физики).

3. Уравнение Римана

$u_t = f(u)_x$ размерности один имеет ударные линии, которые определяются формализмом типа элементарной катастрофы. На плоскости (x,t) исходя из начальных условий мы строим вспомогательную функцию (потенциал), которую минимизируем с помощью условия Максвелла (теорема Питера Лекса (Peter Lax)).

4. В прикладной механике

Теория бифуркации вторгается в исследование устойчивости равновесия самых различных систем. Схемы ТРК (теории равновесных катастроф. — *Прим. перев.*) часто находят применение, как в знаменитой «машине катастроф» Зимана или в законе Койтера (Koiter), описывающем устойчивость критических нагрузок относительно смещений.

Иногда теорию необходимо детализировать (см. книгу: Thompson-Hunt. A general theory of elastic stability, Wyley).

5. В теории фазовых переходов

Классическая теория среднего поля, или теория Ландау, ведет непосредственно к формализму ТРК. Известно, что в количественном отношении эта теория неверна (по причине неправильных критических показателей степени, которые она предоставляет, как в модели Ван-дер-Ваальса), но в качественном отношении она остается корректной (с точки зрения топологической структуры диаграмм фаз).

6. В математической экономике

Классическая модель экономики чистого обмена Вальраса – Парето при максимизации функций полезности экономических факторов сразу приводит к формализму ТРК. Отсюда можно вывести результаты, касающиеся специфической природы «множеств Максвелла», в которых от функции требуется иметь разрывные производные (первого порядка). Школа Р. Дебре (R. Debreu) весьма широко использовала технику особенностей для описания множества равновесия в экономике.

Теперь мы приступаем к более глубокому обсуждению границ формализма ТК. Однако это будет техническое обсуждение, которое читатель, не имеющий математической подготовки, может опустить без каких-либо неудобств для дальнейшего...

Литература

[1] Abraham R. *Foundations of mechanics*, (Benjamin, New York, 1967).

[2] d'Arcy Thompson. *On Growth and Form*, (Cambridge Univ. Press, 1917).

[3] V. I. Arnold. *Singularities of differentiable functions*, Invited address, International Congress of Mathematicians, (Vancouver, 1974).

[4] Arnold et Avez. *Problemes ergodiques en Mecanique classique*, (Gauthier-Villars, Paris, 1967).

[5] Boardman J. *Singularities of differentiable mappings*, (Publ. Math. I. H. E. S., 33, 1967).

[6] Glaeser G. *Sur le theoreme de preparation differentiable* (Proceedings of Liverpool Symposium singularities), Ed. C. T. C. Wall, Springer Lecture Notes 192. — Berlin, 1971.

[7] Godbillon C. *Geometric Differentielle et Geometrie Analytique*, (Hermann, Paris, 1969).

[8] Godwin A. N. *Three dimensional pictures for Thorn's parabolic umbilic*, (Publ. Math. I. H. E. S., 40, 1971, p. 107–136).

[9] Guckenheimer J. *Bifurcation and catastrophes*, (Bahia Symposium on Dynamical Systems, Ed. M. M. Peixoto, Academic Press, New York, 1973).

[10] Lojasiewicz S. *Whitney fields and the Malgrange preparation theorem*, (Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium, Ed. C. T. C. Wall, Springer Lecture Notes, 192. — Berlin, 1971).

[11] Malgrange B. *Ideals of differentiable functions*, (Oxford Univ. Press, 1966).

[12] Martinet J. *Sur les singularity des formes differentielles*, (Ann. Inst. Fourier, 20, 1970, p. 95–178).

[13] Mather J. *Stability of C^∞-mappings*:
I *The division theorem* — Ann. of Maths 87 (1968) 98–104.
II *Infinitesimal stability implies stability*, Ann. Math. 89 (1969) 254–291.
III *Finitely determined map forms*, Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968) 127–156.
IV *Classification of stable germs by R-algebras*, Publ. Math. I.H.E.S. 37 (1969) 223–268.
V Transversality, Adavances in Math. 4 (1970) 301-336.
VI The nice dimension, Liverpool Singularities Symposium, Ed. C. T. C. Wall, Springer Lecture Notes, 192.

[14] Mather J. (NTS). *Notes on Topological Stability*, (Harvard preprint, 1970).

[15] Mather J. *On Nirenbergs's proof of Malgrange's preparation theorem*, (Liverpool Singularities Symposium, Ed. C. T. C. Wall, Springer Lecture Notes 192. — Berlin, 1971).

[16] Mather J. *Stratifications and mappings*, (Salvador Symposium on Dynamical Systems, Ed. M. Peixoto, Acad. Press., New York, 1973).

[17] Newhouse S. *Diffeomorphisms with infinitely many sinks*, Topology, 13, 1, March 1974, pp. 9–19.

[18] Nirenberg L. *A proof of the Malgrange Preparation theorem*, Liverpool Symposium on Singularities, Ed. C. T. C. Wall, Springer Lecture Notes 192. — Berlin, 1971.

[19] Pham F. *Introduction a Vetude topologique des singularites de Landau*, (Memorial des Sciences Math., Gauthier–Villars. — Paris, 1967).

[20] Pham F. *Remarque sur l'equisingularite universelle*, (Nice preprint 1970).

[21] Sergeraert F. *Un theoreme de fonctions implicites sur certains espaces de Frechet et quelques applications*, (Ann. ENS Paris, 5, 4, 1972, 599–680).

[22] Shub. M. *Structurally stable dijfeomorphisms are dense*, (Bull. AMS, Vol. 78, 1972, p. 817).

[23] Siersma D. *The singularities of C^∞-functions of right-codimension* $\leqslant 8$, Indag. Math. 25, 1973, 31–37.

[24] Smale S. *Differential dynamical systems*, (Bull. AMS, 73, 1967, 747–817).

[25] Takens F. *A nonstabilizable jet of a singularity of a vector field*, (Salvador Symposium on Dynamical Systems, Ed. M. Peixoto, Acad. Press, New York, 1973, 583–597).

[26] Takens F. *Unfoldings of certain singularities of vector fields*: generalized Hopf bifurcations, (J. Diff. Equations, 14, 1973, p. 476–493).

[27] Thorn R. (SSM). *Stabilite structurelle et Morphogenese*, (Benjamin Edis-cience, New York, 1972), [n. e., 1968, 1].

[28] Thorn R. (TL). "*Topologie et Linguistique*", Essay on Topology (ded. to G. de Rham, Ed. A. Haefliger et R. Narasimham, Springer, Berlin, 1970, p. 226–248), [n. e., 1970, 1].

[29] Thorn R. (SB). *Structuralism and biology — in Towards a theoretical Biology*, 4, Ed. C. H. Waddington, Univ. of Edimburg Press, 4, 68–82, [n. e., 1972, 6].

[30] Thorn R. (EMS). *Ensembles et Morphismes stratifies*, (Bull. AMS, 75, 1969, 240–284), [n. e., 1968, 8].

[31] Thorn R. (LM). *Stratified sets and morphisms*, (Liverpool Singularities Symposium, Ed. C. T. C. Wall, Springer Lectures Notes 192), [n. e., 1970, 3].

[32] Thorn R. (LC). *Langage et catastrophes: elements pour line semantique topologique*, (Salvador Symposium for Dynamical Systems, Ed. M. Peixoto, Acad. Press New York, 1973), [n. e., 1971, 5].

[33] Varchenko A. N. *Invited Address*, Int. Congress of Math. Vancouver (B. C.), 1974.

[34] Waddington C. H. *Introduction to Modern Genetics*, Allen and Unwin, London, 1940.

[35] Wasserman G. (r, s)-*Stability of unfoldings*, (Regensburg preprint 1974).

[36] Williams R. *Expanding attractors*, (Publ. Math. I. H. E. S., 43, 1974, p. 169–203).

[37] Zeeman E. C. *The C°-density of diffeomorphisms and flows*, (Proceedings of Dynamical Systems Southampton, 1972).

[38] Zeeman E. C. *Levels of structure in catastrophe theory*, (Proc. Int. Congress of Math. Vancouver, 1974).

Рене Том

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МОРФОГЕНЕЗА

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка Д. П. Вакуленко
Корректор З. Ю. Соболева

Подписано в печать 25.07.2006. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,67. Уч. изд. л. 7,81.
Гарнитура Антиква. Бумага офсетная №1. Заказ №107.

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295

ISBN 5-93972-532-5

9 785939 725323